Lógica Epistêmica e Mudanças de Crenças

Mario Benevides

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro, Brasil

2013 - DCC - UFRJ

Inteligência Artificial

- "Construir Sistemas Raciocinam como Humanos (???)"

Inteligência Artificial

- "Construir Sistemas Raciocinam como Humanos (???)"
- Raciocínio $\Rightarrow$ Conhecimento

Inteligência Artificial

- "Construir Sistemas Raciocinam como Humanos (???)"
- Raciocínio $\Rightarrow$ Conhecimento
- Como Representar o Conhecimento e Raciocinar sobre ele?

Inteligência Artificial

- "Construir Sistemas Raciocinam como Humanos (???)"
- Raciocínio $\Rightarrow$ Conhecimento
- Como Representar o Conhecimento e Raciocinar sobre ele?
  - Lógica

Inteligência Artificial

- "Construir Sistemas Raciocinam como Humanos (???)"
- Raciocínio $\Rightarrow$ Conhecimento
- Como Representar o Conhecimento e Raciocinar sobre ele?
  - Lógica
  - Redes Neurais e etc

Inteligência Artificial

- "Construir Sistemas Raciocinam como Humanos (???)"
- Raciocínio $\Rightarrow$ Conhecimento
- Como Representar o Conhecimento e Raciocinar sobre ele?
  - Lógica
  - Redes Neurais e etc
- Raciocínio $\Rightarrow$ Conhecimento $\Rightarrow$ **Lógica**

Roteiro

- Jogos e Quebra-Cabeça.

Roteiro

- Jogos e Quebra-Cabeça.
- Lógica Epistêmica Multi-Agente.
  - Halpern, Fagin, Moses e Vardi

Roteiro

- Jogos e Quebra-Cabeça.
- Lógica Epistêmica Multi-Agente.
  - Halpern, Fagin, Moses e Vardi
- Lógicas Epistêmicas Dinâmicas.

Roteiro

- Jogos e Quebra-Cabeça.
- Lógica Epistêmica Multi-Agente.
  - Halpern, Fagin, Moses e Vardi
- Lógicas Epistêmicas Dinâmicas.
  - Public Anouncement Logic

Roteiro

- Jogos e Quebra-Cabeça.
- Lógica Epistêmica Multi-Agente.
  - Halpern, Fagin, Moses e Vardi
- Lógicas Epistêmicas Dinâmicas.
  - Public Anouncement Logic
  - Action Models Logic

Jogos e Quebra-Cabeça

- Cartas Russas (Russian Cards)

Jogos e Quebra-Cabeça

- Cartas Russas (Russian Cards)
- Cem prisioneiros e uma Lâmpada

Jogos e Quebra-Cabeça

- Cartas Russas (Russian Cards)
- Cem prisioneiros e uma Lâmpada
- Crianças com Lama na Testa

Cartas Russas (Russian Cards)

- **3 Agentes**: **a**na e **b**eto e **c**arla

Cartas Russas (Russian Cards)

- **3 Agentes**: **a**na e **b**eto e **c**arla
- **7 Cartas**: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Cartas Russas (Russian Cards)

- **3 Agentes**: **a**na e **b**eto e **c**arla
- **7 Cartas**: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- **Distribuição**: 3 cartas para ana e beto e 1 para carla

Cartas Russas (Russian Cards)

- **3 Agentes**: **a**na e **b**eto e **c**arla
- **7 Cartas**: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- **Distribuição**: 3 cartas para ana e beto e 1 para carla
- **Objetivo**: descobrir as cartas dos outros

Cartas Russas (Russian Cards)

- **3 Agentes**: **a**na e **b**eto e **c**arla
- **7 Cartas**: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- **Distribuição**: 3 cartas para ana e beto e 1 para carla
- **Objetivo**: descobrir as cartas dos outros
- **Regra**: ana e beto podem se comunicar publicamente

Cartas Russas (Russian Cards)

- **3 Agentes**: **a**na e **b**eto e **c**arla
- **7 Cartas**: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- **Distribuição**: 3 cartas para ana e beto e 1 para carla
- **Objetivo**: descobrir as cartas dos outros
- **Regra**: ana e beto podem se comunicar publicamente
- **Ganha carla**: se após comunicação ela descobre
- **Ganha ana e beto**: se após comunicação um deles descobre mas não carla

Cartas Russas (Russian Cards) - Exemplo

- **Distribuição**: **a**na $\Rightarrow \{0,1,2\}$ e **b**eto $\Rightarrow \{3,4,5\}$ e **c**arla $\Rightarrow \{6\}$

Cartas Russas (Russian Cards) - Exemplo

- **Distribuição**: **a**na $\Rightarrow \{0, 1, 2\}$ e **b**eto $\Rightarrow \{3, 4, 5\}$ e **c**arla $\Rightarrow \{6\}$
- **Comunicação 1**: ana diz "tenho 012 ou beto tem 012"e beto diz "tenho 345 ou ana tem 345", bom ou ruim?

Cartas Russas (Russian Cards) - Exemplo

- **Distribuição**: **a**na $\Rightarrow$ $\{0, 1, 2\}$ e **b**eto $\Rightarrow$ $\{3, 4, 5\}$ e **c**arla $\Rightarrow$ $\{6\}$
- **Comunicação 1**: ana diz "tenho 012 ou beto tem 012" e beto diz "tenho 345 ou ana tem 345", bom ou ruim?
- **Ruim**: carla ganha!!! ☹

Cartas Russas (Russian Cards) - Exemplo

- **Distribuição**: **a**na $\Rightarrow \quad \{0, 1, 2\}$ e **b**eto $\Rightarrow \quad \{3, 4, 5\}$ e **c**arla $\Rightarrow \quad \{6\}$
- **Comunicação 1**: ana diz "tenho 012 ou beto tem 012"e beto diz "tenho 345 ou ana tem 345", bom ou ruim?
- **Ruim**: carla ganha!!! ☹
- **Comunicação 2**: ana diz "tenho 012 ou 034 ou 056 ou 135 ou 246", bom ou ruim?

Cartas Russas (Russian Cards) - Exemplo

- **Distribuição**: **a**na $\Rightarrow$ $\{0, 1, 2\}$ e **b**eto $\Rightarrow$ $\{3, 4, 5\}$ e **c**arla $\Rightarrow$ $\{6\}$
- **Comunicação 1**: ana diz "tenho 012 ou beto tem 012"e beto diz "tenho 345 ou ana tem 345", bom ou ruim?
- **Ruim**: carla ganha!!! ☹
- **Comunicação 2**: ana diz "tenho 012 ou 034 ou 056 ou 135 ou 246", bom ou ruim?
- **Bom**: : ana e beto ganham!!! ☺

Cartas Russas (Russian Cards) - Exemplo

- **Distribuição**: **a**na $\Rightarrow \{0, 1, 2\}$ e **b**eto $\Rightarrow \{3, 4, 5\}$ e **c**arla $\Rightarrow \{6\}$
- **Comunicação 1**: ana diz "tenho 012 ou beto tem 012" e beto diz "tenho 345 ou ana tem 345", bom ou ruim?
- **Ruim**: carla ganha!!! ☹
- **Comunicação 2**: ana diz "tenho 012 ou 034 ou 056 ou 135 ou 246", bom ou ruim?
- **Bom**: : ana e beto ganham!!! ☺

- **Como ana chegou a esta comunicação???**

Cem prisioneiros e uma Lâmpada

- **Inicio**: Comunicado a todos os prisioneiros
  - 100 prisioneiros estão numa sala
  - eles vão ser colocados numa cela sozinhos e sem comunicação
  - eles vão ser escolhidos aleatóriamente um de cada vez para uma sala de interrogatório
  - nesta sala tem um interruptor que acende ou apaga uma lâmpada
  - a lâmpada começa apagada
  - um prisioneiro pode ser interrogado mais de uma vez

Cem prisioneiros e uma Lâmpada

- **Inicio**: Comunicado a todos os prisioneiros
  - 100 prisioneiros estão numa sala
  - eles vão ser colocados numa cela sozinhos e sem comunicação
  - eles vão ser escolhidos aleatóriamente um de cada vez para uma sala de interrogatório
  - nesta sala tem um interruptor que acende ou apaga uma lâmpada
  - a lâmpada começa apagada
  - um prisioneiro pode ser interrogado mais de uma vez
- **Objetivo**: descobrir se todos já foram interrogados.

Cem prisioneiros e uma Lâmpada

- **Inicio**: Comunicado a todos os prisioneiros
  - 100 prisioneiros estão numa sala
  - eles vão ser colocados numa cela sozinhos e sem comunicação
  - eles vão ser escolhidos aleatóriamente um de cada vez para uma sala de interrogatório
  - nesta sala tem um interruptor que acende ou apaga uma lâmpada
  - a lâmpada começa apagada
  - um prisioneiro pode ser interrogado mais de uma vez
- **Objetivo**: descobrir se todos já foram interrogados.
- **Ruim**: se errar todos morrem!!! ☹

Cem prisioneiros e uma Lâmpada

- **Inicio**: Comunicado a todos os prisioneiros
  - 100 prisioneiros estão numa sala
  - eles vão ser colocados numa cela sozinhos e sem comunicação
  - eles vão ser escolhidos aleatóriamente um de cada vez para uma sala de interrogatório
  - nesta sala tem um interruptor que acende ou apaga uma lâmpada
  - a lâmpada começa apagada
  - um prisioneiro pode ser interrogado mais de uma vez
- **Objetivo**: descobrir se todos já foram interrogados.
- **Ruim**: se errar todos morrem!!! ☹
- **Bom**: : se acertar, todos estão livres!!! ☺

Cem prisioneiros e uma Lâmpada

- **Inicio**: Comunicado a todos os prisioneiros
  - 100 prisioneiros estão numa sala
  - eles vão ser colocados numa cela sozinhos e sem comunicação
  - eles vão ser escolhidos aleatóriamente um de cada vez para uma sala de interrogatório
  - nesta sala tem um interruptor que acende ou apaga uma lâmpada
  - a lâmpada começa apagada
  - um prisioneiro pode ser interrogado mais de uma vez
- **Objetivo**: descobrir se todos já foram interrogados.
- **Ruim**: se errar todos morrem!!! ☹
- **Bom**: : se acertar, todos estão livres!!! ☺

- **Como bolar uma estratégia para libertar todos???**

Problema Crianças c/ Lama na testa

- Grupo de crianças brincando na lama;

Problema Crianças c/ Lama na testa

- Grupo de crianças brincando na lama;
- Pai chega e vê que algumas possuem lama na testa;

Problema Crianças c/ Lama na testa

- Grupo de crianças brincando na lama;
- Pai chega e vê que algumas possuem lama na testa;
- Crinças podem ver a lama na testas das outras mas não na própria testa;

Problema Crianças c/ Lama na testa

- Grupo de crianças brincando na lama;
- Pai chega e vê que algumas possuem lama na testa;
- Crinças podem ver a lama na testas das outras mas não na própria testa;
- Pai Anuncia:

Problema Crianças c/ Lama na testa

- Grupo de crianças brincando na lama;
- Pai chega e vê que algumas possuem lama na testa;
- Crinças podem ver a lama na testas das outras mas não na própria testa;
- Pai Anuncia:

    1. Tem pelo menos uma criança c. lama!!!

Problema Crianças c/ Lama na testa

- Grupo de crianças brincando na lama;
- Pai chega e vê que algumas possuem lama na testa;
- Crinças podem ver a lama na testas das outras mas não na própria testa;
- Pai Anuncia:

  1. Tem pelo menos uma criança c. lama!!!
  2. Alguém já sabe se tem lama na testa???

     ⋮

Problema Crianças c/ Lama na testa

- Grupo de crianças brincando na lama;
- Pai chega e vê que algumas possuem lama na testa;
- Crinças podem ver a lama na testas das outras mas não na própria testa;
- Pai Anuncia:

1. Tem pelo menos uma criança c. lama!!!
2. Alguém já sabe se tem lama na testa???

   ⋮

k. Alguém já sabe se tem lama na testa???

Problema Crianças c/ Lama na testa

- Grupo de crianças brincando na lama;
- Pai chega e vê que algumas possuem lama na testa;
- Crinças podem ver a lama na testas das outras mas não na própria testa;
- Pai Anuncia:

  1. Tem pelo menos uma criança c. lama!!!
  2. Alguém já sabe se tem lama na testa???

     ⋮

  k. Alguém já sabe se tem lama na testa???
- **Quantos anúncios serão feitos até que crianças c. lama saibam que estão sujas**?

Problema Crianças c/ Lama na testa

- Grupo de crianças **n** brincando na lama;

Problema Crianças c/ Lama na testa

- Grupo de crianças **n** brincando na lama;
- Tem **k** com lama na testa;

Problema Crianças c/ Lama na testa

- Grupo de crianças **n** brincando na lama;
- Tem **k** com lama na testa;
- **Quantos anúncios serão feitos até que crianças c. lama saibam que estão sujas**?

Problema Crianças c/ Lama na testa

- Grupo de crianças **n** brincando na lama;
- Tem **k** com lama na testa;
- **Quantos anúncios serão feitos até que crianças c. lama saibam que estão sujas**?
- Exemplos:
  - **n =3** e **k=1** serão **1** anúncios;
  - **n =3** e **k=2** serão **2** anúncio;

Problema Crianças c/ Lama na testa

- Grupo de crianças **n** brincando na lama;
- Tem **k** com lama na testa;
- **Quantos anúncios serão feitos até que crianças c. lama saibam que estão sujas**?
- Exemplos:
  - **n =3** e **k=1** serão **1** anúncios;
  - **n =3** e **k=2** serão **2** anúncio;
- Serão necessários **k** anúncios!!!

Problema Crianças c/ Lama na testa

- Grupo de crianças **n** brincando na lama;
- Tem **k** com lama na testa;
- **Quantos anúncios serão feitos até que crianças c. lama saibam que estão sujas**?
- Exemplos:
  - **n =3** e **k=1** serão **1** anúncios;
  - **n =3** e **k=2** serão **2** anúncio;
- Serão necessários **k** anúncios!!!
- **Por quê**?

Modelando Conhecimento

- **Agentes**: **a**na e **b**eto

Modelando Conhecimento

- **Agentes**: **a**na e **b**eto
- Carta contendo a informação:

  $p =$ "ana ganhou R$ 1,00"

  $\neg p =$ "ana **não** ganhou R$ 1,00"

Modelando Conhecimento

- **Agentes**: **a**na e **b**eto
- Carta contendo a informação:

  $p =$ "ana ganhou R$ 1,00"

  $\neg p =$ "ana **não** ganhou R$ 1,00"

- envelope lacrado e sobre a mesa

Modelando Conhecimento

- **Agentes**: **a**na e **b**eto
- Carta contendo a informação:

  $p =$ "ana ganhou R$ 1,00"

  $\neg p =$ "ana **não** ganhou R$ 1,00"

- envelope lacrado e sobre a mesa
- O que ana e beto sabem?

Modelando Conhecimento

- Dois estados possíveis para ana e beto

Modelando Conhecimento

- Dois estados possíveis para ana e beto

- $s_1 =$ "ana ganhou R\$ 1,00" $\Rightarrow\ p$
- $s_2 =$ "ana não ganhou R\$ 1,00" $\Rightarrow\ \neg p$

Modelando Conhecimento

- Dois estados possíveis para ana e beto

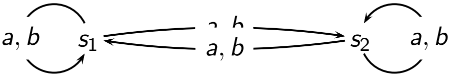
- $s_1 =$ "ana ganhou R\$ 1,00" $\Rightarrow\ p$
- $s_2 =$ "ana não ganhou R\$ 1,00" $\Rightarrow\ \neg p$
- ana e beto não sabem se estão em s_1 ou s_2

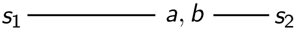
$$\underline{s_1} — a, b — s_2$$

Modelando Conhecimento

$M = \langle S, \sim, V \rangle$:

- $S = \{s_1, s_2\}$
- $\sim_a = \{(s_1, s_2), (s_1, s_1), (s_2, s_1), (s_2, s_2)\}$
- $\sim_b = \{(s_1, s_2), (s_1, s_1), (s_2, s_1), (s_2, s_2)\}$
- $V(p) = \{s_1\}$





Lógica Epistêmica - Linguagem

- Alfabeto
  - Φ conj. contável de símbolos prop.,
  - $\mathcal{A}$ conjunto finito de agentes,
  - $\neg$ e $\wedge$ conectivos booleanos,
  - K_a uma modalidade para cada agente a.

Lógica Epistêmica - Linguagem

- Alfabeto
  - Φ conj. contável de símbolos prop.,
  - $\mathcal{A}$ conjunto finito de agentes,
  - $\neg$ e $\wedge$ conectivos booleanos,
  - K_a uma modalidade para cada agente a.
- **Linguagem**

$$\varphi ::= p \mid \top \mid \neg\varphi \mid \varphi_1 \wedge \varphi_2 \mid K_a\varphi$$

onde $p \in \Phi$, $a \in \mathcal{A}$.

Modelando Conhecimento

$$\underline{s_1} \xrightarrow{\quad a, b \quad} s_2$$

- Ana não sabe p $\Rightarrow \neg K_a p$

Modelando Conhecimento

$$\underline{s_1} \xrightarrow{\quad a, b \quad} s_2$$

- Ana não sabe p $\Rightarrow \neg K_a p$
- Ana sabe que Beto não sabe p $\Rightarrow K_a \neg K_b p$

Modelando Conhecimento

$$\underline{s_1} \;\text{———}\; a, b \;\text{———}\; s_2$$

- Ana não sabe p $\Rightarrow \neg K_a p$
- Ana sabe que Beto não sabe p $\Rightarrow K_a \neg K_b p$
- Beto sabe que Ana sabe que Beto não sabe p $\Rightarrow K_b K_a \neg K_b p$

Modelando Conhecimento

$$\underline{s_1} \xrightarrow{} a, b \longrightarrow s_2$$

- Ana não sabe p $\Rightarrow \neg K_a p$
- Ana sabe que Beto não sabe p $\Rightarrow K_a \neg K_b p$
- Beto sabe que Ana sabe que Beto não sabe p $\Rightarrow K_b K_a \neg K_b p$

- **Por que as proposições sâo verdadeiras na Estrutura?**

Modelando Conhecimento

$$\underline{s_1} \xrightarrow{\quad} a, b \xrightarrow{\quad} s_2$$

- Por que Ana não sabe p em s_1?$\Rightarrow s_1 \models \neg K_a p$?

  "Ana **não distingue** s_1 de s_2, e $s_1 \models p$ e $s_2 \models \neg p$"

Modelando Conhecimento

$$\underline{s_1} \overset{a,b}{\text{———————}} s_2$$

- Por que Ana não sabe p em s_1?$\Rightarrow s_1 \models \neg K_a p$?

  "Ana **não distingue** s_1 de s_2, e $s_1 \models p$ e $s_2 \models \neg p$"

- Por que Ana sabe $(p \vee \neg p)$ em s_1?$\Rightarrow s_1 \models K_a(p \vee \neg p)$?

  "Ana **não distingue** s_1 de s_2, e $s_1 \models (p \vee \neg p)$ e $s_2 \models (p \vee \neg p)$"

Modelando Conhecimento

$\underline{s_1}$ ——— a, b ——— s_2

- Por que Ana não sabe p em s_1?$\Rightarrow$ $s_1 \models \neg K_a p$?

  "Ana **não distingue** s_1 de s_2, e $s_1 \models p$ e $s_2 \models \neg p$"

- Por que Ana sabe $(p \vee \neg p)$ em s_1?$\Rightarrow$ $s_1 \models K_a(p \vee \neg p)$?

  "Ana **não distingue** s_1 de s_2, e $s_1 \models (p \vee \neg p)$ e $s_2 \models (p \vee \neg p)$"

- "Ana sabe uma proposição φ em um estado s_1 ($s_1 \models K_a\varphi$), se em todos os estados que ela **não distingue** de s_1 φ é verdadeira."

Semântica

- Um *frame* é um par $F = (W, \sim_a)$ onde
  - W é um conjunto não-vazio de *estados*;
  - $\sim_a$ é uma relação binária sobre W, para cada agente a
    - Reflexiva
    - Transitiva
    - Simétrica

Semântica

- Um *frame* é um par $F = (W, \sim_a)$ onde
  - W é um conjunto não-vazio de *estados*;
  - $\sim_a$ é uma relação binária sobre W, para cada agente a
    - Reflexiva
    - Transitiva
    - Simétrica
- Um *modelo* é um par $M = (F, V)$ onde
  - $F = (W, R)$ é um *frame* e
  - V é uma função de Φ no conjunto das partes de W, que faz corresponder a todo símbolo proposicional $p \in \Phi$ o conjunto de estados nos quais p é satisfeito, i.e., $V : \Phi \longmapsto Pow(W)$.

Semântica

- Dada uma estrutura $\mathcal{M} = \langle S, \sim_a, V \rangle$

$$
\begin{array}{lll}
\mathcal{M}, s \models p & \textit{iff} & s \in V(p) \\
\mathcal{M}, s \models \neg\varphi & \textit{iff} & \mathcal{M}, s \not\models \varphi \\
\mathcal{M}, s \models \varphi \wedge \psi & \textit{iff} & \mathcal{M}, s \models \varphi \text{ e } \mathcal{M}, s \models \psi \\
\mathcal{M}, s \models K_a\varphi & \textit{iff} & \text{p/ todo } t \in S : s \sim_a t \text{ implica } \mathcal{M}, t \models \varphi
\end{array}
$$

Jogo de Cartas

- 3 Cartas: $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$ and $\mathbf{2}$,

Jogo de Cartas

- 3 Cartas: $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$ and $\mathbf{2}$,
- 3 Jogadores **a**na, **b**eto and **c**arla,

Jogo de Cartas

- 3 Cartas: $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$ and $\mathbf{2}$,
- 3 Jogadores **a**na, **b**eto and **c**arla,
- Cada jog. recebe 1 carta e **não** sabe as cartas dos outros

Jogo de Cartas

- 3 Cartas: **0**, **1** and **2**,
- 3 Jogadores **a**na, **b**eto and **c**arla,
- Cada jog. recebe 1 carta e **não** sabe as cartas dos outros
- $0_x, 1_x, 2_x$, $x \in \{a, b, c\}$ para: "jogador x tem carta **0**, **1** or **2**.

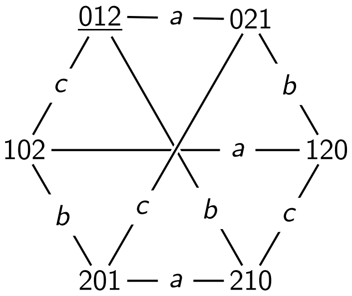
Jogo de Cartas

- 3 Cartas: **0**, **1** and **2**,
- 3 Jogadores **a**na, **b**eto and **c**arla,
- Cada jog. recebe 1 carta e **não** sabe as cartas dos outros
- $0_x, 1_x, 2_x$, $x \in \{a, b, c\}$ para: "jogador x tem carta **0**, **1** or **2**.
- Estados: 012 é o estado onde **a** tem **0**, **b** tem **1** e **c** tem **2**

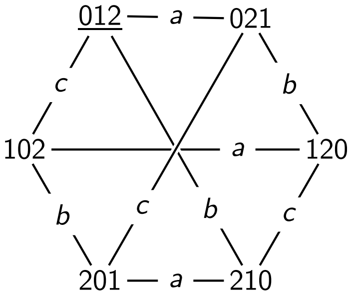
Jogo de Cartas

$Hexa1 = \langle S, \sim, V \rangle$:

- $S = \{012, 021, 102, 120, 201, 210\}$
- $\sim_a = \{(012, 012), (012, 021), (021, 021), \dots\}$
- $V(0_a) = \{012, 021\}$, $V(1_a) = \{102, 120\}$, ...



Jogo de Cartas



$012 \models K_a(1_b \vee 2_b)$

Jogo de Cartas - Exercícios

1. $012 \models K_a(K_c 1_c \vee K_c 2_c)$
2. $012 \models B_c(1_b \wedge K_a 2_a)$
3. $012 \models \neg K_a(K_c 1_c \wedge K_b 2_b)$
4. $012 \models K_a(0_a \wedge K_b(1_b \wedge K_c 1_c))$

Axiomatização

- **Axiomas**
  1. Todas as instâncias das tautologias proposicionais,
  2. $K_a(\varphi \to \psi) \to (K_a\varphi \to K_a\psi)$,
  3. $K_a\varphi \to \varphi$,
  4. $K_a\varphi \to K_aK_a\varphi$ (+ *introspection*),
  5. $\neg K_a\varphi \to K_a\neg K_a\varphi$ ($-$ *introspection*),

Axiomatização

- **Axiomas**
  1. Todas as instâncias das tautologias proposicionais,
  2. $K_a(\varphi \to \psi) \to (K_a\varphi \to K_a\psi)$,
  3. $K_a\varphi \to \varphi$,
  4. $K_a\varphi \to K_aK_a\varphi$ $\quad$ $(+$ *introspection*$)$,
  5. $\neg K_a\varphi \to K_a\neg K_a\varphi$ $\quad$ $(-$ *introspection*$)$,

- **Regras de inferência**
  M.P. $\varphi, \varphi \to \psi / \psi$ $\qquad$ U.G. $\varphi / K_a\varphi$ $\qquad$ UB. $\varphi / \sigma\varphi$
  onde σ é um mapa substituindo uniformemente fórmulas para variáveis proposicionais.

Lógicas Epistêmicas Dinâmicas

- Ações que mudam o estado epistêmico do Agente

Lógicas Epistêmicas Dinâmicas

- Ações que mudam o estado epistêmico do Agente
  - Ações Públicas

    "Todos os agentes percebem (sabem) o conteúdo"
    Ex. Broadcast de uma mensagem

Lógicas Epistêmicas Dinâmicas

- Ações que mudam o estado epistêmico do Agente
  - Ações Públicas

    "Todos os agentes percebem (sabem) o conteúdo"
    Ex. Broadcast de uma mensagem
  - Ações Privadas

    "Todos os agentes num **grupo** percebem (sabem) o conteúdo"
    Ex. mensagem de um agente para outro,

Lógicas Epistêmicas Dinâmicas

- Ações Públicas

  "**Public Annoucement Logic"**

Lógicas Epistêmicas Dinâmicas

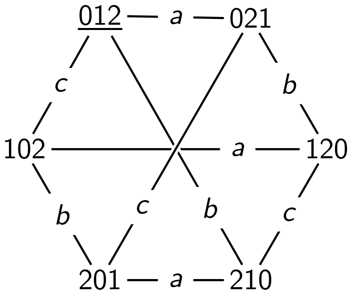
- Ações Públicas

  "**Public Annoucement Logic"**

- Ações Privadas

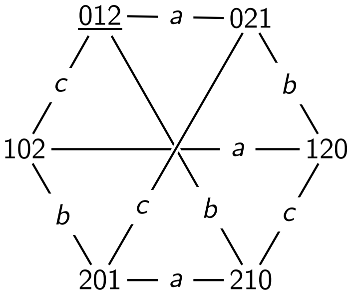
  "**Action Model Logic"**

Public Annoucement Logic



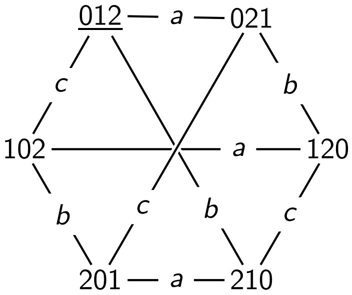
- Ana anuncia Publicamente que não tem carta **1**

Public Annoucement Logic



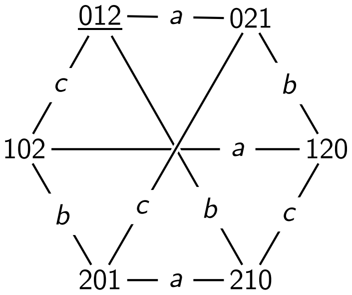
- Ana anuncia Publicamente que não tem carta **1**
- Após anúcio Carla sabe Beto tem carta **1**

Public Annoucement Logic



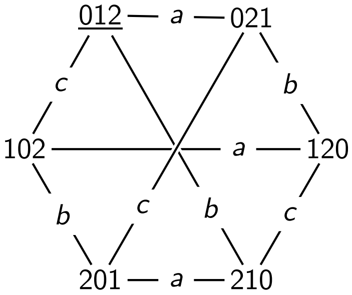
- Ana anuncia Publicamente que não tem carta **1**
- Após anúcio Carla sabe Beto tem carta **1**
- Após anúcio Carla sabe Ana tem carta **0**

Public Annoucement Logic



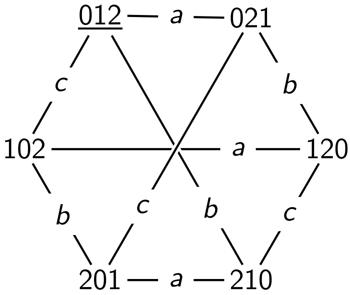
- Ana anuncia Publicamente que não tem carta **1**
- Após anúcio Carla sabe Beto tem carta **1**
- Após anúcio Carla sabe Ana tem carta **0**
- Após anúcio Beto não sabe a carta de Ana

Public Annoucement Logic



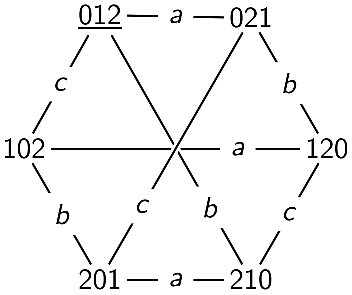
- Após anúcio Carla sabe Beto tem carta **1**
  $[\neg 1_a] K_c 1_b$

Public Annoucement Logic



- Após anúcio Carla sabe Beto tem carta **1**
  $[\neg 1_a] K_c 1_b$
- Após anúcio Carla sabe Ana tem carta **0**
  $[\neg 1_a] K_c 0_a$

Public Annoucement Logic



- Após anúcio Carla sabe Beto tem carta **1**
  $[\neg 1_a] K_c 1_b$
- Após anúcio Carla sabe Ana tem carta **0**
  $[\neg 1_a] K_c 0_a$
- Após anúcio Beto não sabe a carta de Ana
  $[\neg 1_a] \neg (K_b 0_a \vee K_b 1_a \vee K_b 2_a)$

Public Announcement Logic: Linguagem

$$\varphi \quad ::= \quad p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid K_a\varphi \mid [\varphi]\psi$$

Significado: $[\varphi]\psi \quad \Rightarrow$ "depois do anúncio de φ, ψ é verdadeiro."

Exemplo: $[\neg 1_a]K_c 1_b \quad \Rightarrow$ Após anúcio que Ana não tem a carta **1**, Carla sabe Beto tem carta **1**

Public Announcement Logic: Semântica

- O efeito de anunciar φ publicamente é um **restrição** no modelo para conter somente estados onde φ 'verdadeiro.

Public Announcement Logic: Semântica

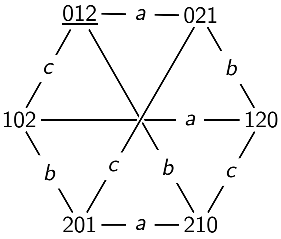
- O efeito de anunciar φ publicamente é um **restrição** no modelo para conter somente estados onde φ 'verdadeiro.
- Anúncios são públicos e verdadeiros.

$$M, s \models [\varphi]\psi \text{ iff } (M, s \models \varphi \text{ implica } M|\varphi, s \models \psi)$$

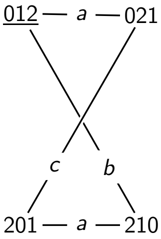
$M|\varphi := \langle S', \sim', V' \rangle$:

$$\begin{array}{lll} S' & := & [\![\varphi]\!]_M \quad := \{s \in S \mid M, s \models \varphi\} \\ \sim'_a & := & \sim_a \cap ([\![\varphi]\!]_M \times [\![\varphi]\!]_M) \\ V'(p) & := & V(p) \cap [\![\varphi]\!]_M \end{array}$$

Exemplo Anúncio



$\Rightarrow$



$Hexa, 012 \models [\neg 1_a]K_c 0_a$

$\Leftrightarrow$

$Hexa, 012 \models \neg 1_a$ and $Hexa|\neg 1_a, 012 \models K_c 0_a$

$\Leftarrow$

$Hexa, 012 \models \neg 1_a$ and $(Hexa|\neg 1_a, 012 \models 0_a$ and $\sim_c(012) = \{012\})$

$\Leftarrow$

$012 \neq V(1_a)$ and $012 \in V'(0_a)$

Jogo de Cartas - PAL - Exercícios

Represente (como uma fórmula em PAL) e verifique, formalmente ($\models$), se algum jogador já sabe a sua carta para os seguintes anúncios:

1. Ana anuncia que ou tem a carta 1 ou a carta 2.
2. Ana anuncia que acredita que a carta de Beto é a 2.
3. Beto anuncia que se ele tem a carta 1 a Ana tem a 0.

Problema Crianças c/ Lama na testa

- Grupo de crianças brincando na lama;

Problema Crianças c/ Lama na testa

- Grupo de crianças brincando na lama;
- Pai chega e vê que algumas possuem lama na testa;

Problema Crianças c/ Lama na testa

- Grupo de crianças brincando na lama;
- Pai chega e vê que algumas possuem lama na testa;
- Crinças podem ver a lama na testas das outras mas não na própria testa;

Problema Crianças c/ Lama na testa

- Grupo de crianças brincando na lama;
- Pai chega e vê que algumas possuem lama na testa;
- Crinças podem ver a lama na testas das outras mas não na própria testa;
- Pai Anuncia:

Problema Crianças c/ Lama na testa

- Grupo de crianças brincando na lama;
- Pai chega e vê que algumas possuem lama na testa;
- Crinças podem ver a lama na testas das outras mas não na própria testa;
- Pai Anuncia:

    1. Tem pelo menos uma criança c. lama!!!

Problema Crianças c/ Lama na testa

- Grupo de crianças brincando na lama;
- Pai chega e vê que algumas possuem lama na testa;
- Crinças podem ver a lama na testas das outras mas não na própria testa;
- Pai Anuncia:

  1. Tem pelo menos uma criança c. lama!!!
  2. Alguém já sabe se tem lama na testa???

  $\vdots$

Problema Crianças c/ Lama na testa

- Grupo de crianças brincando na lama;
- Pai chega e vê que algumas possuem lama na testa;
- Crinças podem ver a lama na testas das outras mas não na própria testa;
- Pai Anuncia:

  1. Tem pelo menos uma criança c. lama!!!
  2. Alguém já sabe se tem lama na testa???

     ⋮

  k. Alguém já sabe se tem lama na testa???

Problema Crianças c/ Lama na testa

- Grupo de crianças brincando na lama;
- Pai chega e vê que algumas possuem lama na testa;
- Crinças podem ver a lama na testas das outras mas não na própria testa;
- Pai Anuncia:

  1. Tem pelo menos uma criança c. lama!!!
  2. Alguém já sabe se tem lama na testa???

     ⋮

  k. Alguém já sabe se tem lama na testa???

- **Quantos anúncios serão feitos até que crianças c. lama saibam que estão sujas**?

Problema Crianças c/ Lama na testa

- Grupo de crianças **n** brincando na lama;

Problema Crianças c/ Lama na testa

- Grupo de crianças **n** brincando na lama;
- Tem **k** com lama na testa;

Problema Crianças c/ Lama na testa

- Grupo de crianças **n** brincando na lama;
- Tem **k** com lama na testa;
- **Quantos anúncios serão feitos até que crianças c. lama saibam que estão sujas**?

Problema Crianças c/ Lama na testa

- Grupo de crianças **n** brincando na lama;
- Tem **k** com lama na testa;
- **Quantos anúncios serão feitos até que crianças c. lama saibam que estão sujas**?
- Exemplos:
  - **n =3** e **k=1** serão **1** anúncios;
  - **n =3** e **k=2** serão **2** anúncio;

Problema Crianças c/ Lama na testa

- Grupo de crianças **n** brincando na lama;
- Tem **k** com lama na testa;
- **Quantos anúncios serão feitos até que crianças c. lama saibam que estão sujas**?
- Exemplos:
  - **n =3** e **k=1** serão **1** anúncios;
  - **n =3** e **k=2** serão **2** anúncio;
- Serão necessários **k** anúncios!!!

Problema Crianças c/ Lama na testa

- Grupo de crianças **n** brincando na lama;
- Tem **k** com lama na testa;
- **Quantos anúncios serão feitos até que crianças c. lama saibam que estão sujas**?
- Exemplos:
  - **n =3** e **k=1** serão **1** anúncios;
  - **n =3** e **k=2** serão **2** anúncio;
- Serão necessários **k** anúncios!!!
- **Por quê**?

Problema Crianças c/ Lama na testa: Exemplo

- Grupo de crianças **3**: **a**na, **b**eto, **c**arla;

Problema Crianças c/ Lama na testa: Exemplo

- Grupo de crianças **3**: **a**na, **b**eto, **c**arla;
- Representação Array : $< \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} >$;

  010 $\Rightarrow$ ana e carla limpas e beto com lama
  101 $\Rightarrow$ ana e carla com lama e beto limpo

Problema Crianças c/ Lama na testa: Exemplo

- Grupo de crianças **3**: **a**na, **b**eto, **c**arla;
- Representação Array : $< \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} >$;

  $\mathbf{010} \Rightarrow$ ana e carla limpas e beto com lama
  $\mathbf{101} \Rightarrow$ ana e carla com lama e beto limpo
- Tem **2** com lama na testa: ana e beto $\Rightarrow$ Estado real **110**

Problema Crianças c/ Lama na testa: Exemplo

- Grupo de crianças **3**: **a**na, **b**eto, **c**arla;
- Representação Array : $<$ **a**, **b**, **c** $>$;

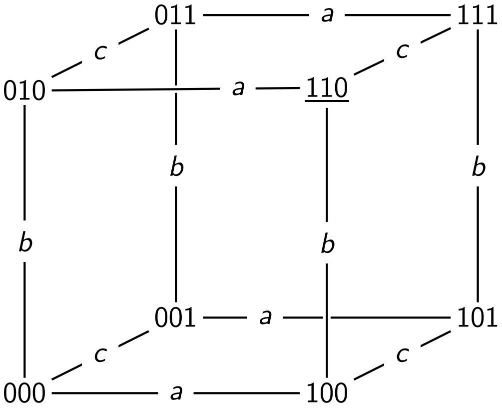
  010 $\Rightarrow$ ana e carla limpas e beto com lama
  101 $\Rightarrow$ ana e carla com lama e beto limpo
- Tem **2** com lama na testa: ana e beto $\Rightarrow$ Estado real **110**
- **Quantos anúncios serão feitos até que crianças c. lama saibam que estão sujas**?

Problema Crianças c/ Lama na testa: Exemplo

- Grupo de crianças **3**: **a**na, **b**eto, **c**arla;
- Representação Array : $<$ **a**, **b**, **c** $>$;

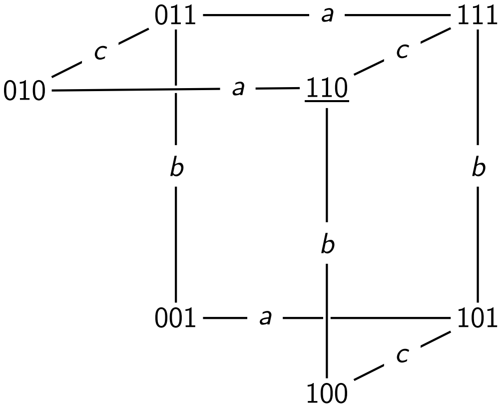
  010 $\Rightarrow$ ana e carla limpas e beto com lama
  101 $\Rightarrow$ ana e carla com lama e beto limpo
- Tem **2** com lama na testa: ana e beto $\Rightarrow$ Estado real **110**
- **Quantos anúncios serão feitos até que crianças c. lama saibam que estão sujas**?
- **2** anúncios

Problema Crianças c/ Lama na testa



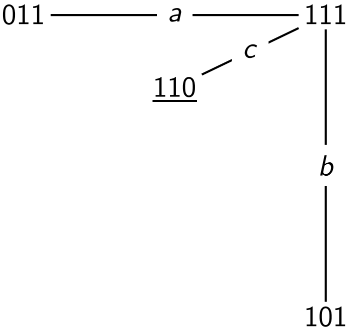
Representação

Problema Crianças c/ Lama na testa



Anúncio: tem pelo menos uma c. lama.

Problema Crianças c/ Lama na testa



Anúncio: Alguém já sabe se tem lama na testa?

Problema Crianças c/ Lama na testa

110

Anúncio: Alguém já sabe se tem lama na testa?

Problema Crianças c/ Lama na testa: Exemplo

- O que está sendo anunciado?

Problema Crianças c/ Lama na testa: Exemplo

- O que está sendo anunciado?
- Anúncio + Silêncio

Problema Crianças c/ Lama na testa: Exemplo

- O que está sendo anunciado?
- Anúncio + Silêncio
- Primeiro Anúncio:

Problema Crianças c/ Lama na testa: Exemplo

- O que está sendo anunciado?
- Anúncio + Silêncio
- Primeiro Anúncio:
  - $[\neg(0_a \wedge 0_b \wedge 0_c)]$

Problema Crianças c/ Lama na testa: Exemplo

- O que está sendo anunciado?
- Anúncio + Silêncio
- Primeiro Anúncio:
  - $[\neg(0_a \wedge 0_b \wedge 0_c)]$
- Segundo Anúncio:

Problema Crianças c/ Lama na testa: Exemplo

- O que está sendo anunciado?
- Anúncio + Silêncio
- Primeiro Anúncio:
  - $[\neg(0_a \wedge 0_b \wedge 0_c)]$
- Segundo Anúncio:
  - $[\neg K_a 1_a \wedge \neg K_b 1_b \wedge \neg K_c 1_c]$

Problema Crianças c/ Lama na testa: Exemplo

- O que está sendo anunciado?
- Anúncio + Silêncio
- Primeiro Anúncio:
  - $[\neg(0_a \wedge 0_b \wedge 0_c)]$
- Segundo Anúncio:
  - $[\neg K_a 1_a \wedge \neg K_b 1_b \wedge \neg K_c 1_c]$
- Exercício: descreva os anúncios para $n = 5$ e $k = 3$

Axiomatização

$[\varphi]p \leftrightarrow (\varphi \to p)$
$[\varphi]\neg\psi \leftrightarrow (\varphi \to \neg[\varphi]\psi)$
$[\varphi](\psi \wedge \chi) \leftrightarrow ([\varphi]\psi \wedge [\varphi]\chi)$
$[\varphi]K_a\psi \leftrightarrow (\varphi \to K_a[\varphi]\psi)$
$[\varphi][\psi]\chi \leftrightarrow [\varphi \wedge [\varphi]\psi]\chi$
From φ, infer $[\psi]\varphi$
From $\chi \to [\varphi]\psi$ and $\chi \wedge \varphi \to E_B\chi$, infer $\chi \to [\varphi]C_B\psi$

Expressividade (Plaza, Gerbrandy):
Today fórmula da linguagem de PAL, sem conhecimento comum, é equivalente a uma fórmula na linguagem da lógica epistêmica.

Action Models

- Modelar Ações entre Agentes.

Action Models

- Modelar Ações entre Agentes.
- Ações Privadas

Action Models

- Modelar Ações entre Agentes.
- Ações Privadas
- Porém todos sabem que elas ocorreram

Action Models

- Modelar Ações entre Agentes.
- Ações Privadas
- Porém todos sabem que elas ocorreram
- Embora só alguns distinguam seu conteúdo.
- **Exemplos**:

Action Models

- Modelar Ações entre Agentes.
- Ações Privadas
- Porém todos sabem que elas ocorreram
- Embora só alguns distinguam seu conteúdo.
- **Exemplos**:

Action Models

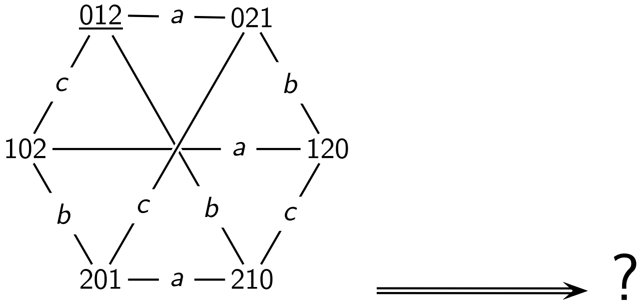
- Modelar Ações entre Agentes.
- Ações Privadas
- Porém todos sabem que elas ocorreram
- Embora só alguns distinguam seu conteúdo.
- **Exemplos**:
  - Um jogador mostrar suas cartas para outro;

Action Models

- Modelar Ações entre Agentes.
- Ações Privadas
- Porém todos sabem que elas ocorreram
- Embora só alguns distinguam seu conteúdo.
- **Exemplos**:
  - Um jogador mostrar suas cartas para outro;
  - Um jogador sussurrar um informação para outro;

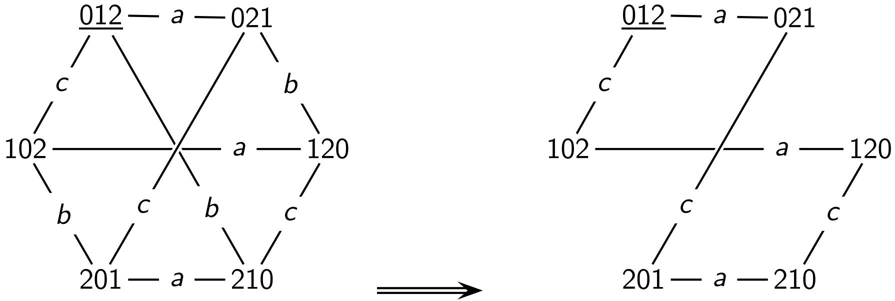
Exemplo: Jogo das 3 Cartas

- ana ⇒ 0, beto ⇒ 1 e carla ⇒ 2
- ana mostra sua carta para beto
- carla não vê a carta de ana



Exemplo: Jogo das 3 Cartas

- ana $\Rightarrow$ 0, beto $\Rightarrow$ 1 e carla $\Rightarrow$ 2
- ana mostra sua carta para beto
- carla não vê a carta de ana



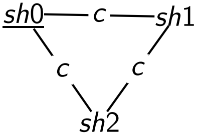
Modelos de Ação

Um modelo de ação M é uma estrutura $\langle \mathrm{S}, \sim_a, \mathrm{pre} \rangle$

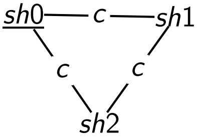
- S é um domínio *finito* de ações ou eventos
- $\sim_a$ é uma relação de equivalência entre S
- pre : $\mathrm{S} \mapsto \mathcal{L}$ é uma função de pré-condição que atribui uma pré-condição para cada $\mathrm{s} \in \mathrm{S}$.

Exemplo Cartas

- gente **a** deseja mostrar a sua carta para o agente **b**.
- 3 ações, **a** mostra **0**, **1** or **2**.
- **a** e **b** distinguem as 3 ações mas **c** não.



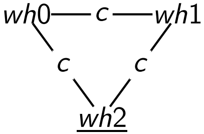
Exemplo Cartas



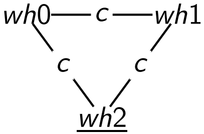
- $S = \{sh0, sh1, sh2\}$
- $\sim_a = \{(s, s) \mid s \in S\}$
- $\sim_b = \{(s, s) \mid s \in S\}$
- $\sim_c = S \times S$
- $pre(sh0) = 0_a$
- $pre(sh1) = 1_a$
- $pre(sh2) = 2_a$

Exemplo Cartas

- **a** sussura p/ **b** que não tem a carta **0**.
- 3 ações, **a** sussurra que não tem **0**, **1** or **2**.
- **a** e **b** distinguem as 3 ações mas **c** não.



Exemplo Cartas



- $S = \{wh0, wh1, wh2\}$
- $\sim_1 = \{(s, s) \mid s \in S\}$
- $\sim_2 = \{(s, s) \mid s \in S\}$
- $\sim_3 = S \times S$
- $pre(wh0) = \neg 0_a$
- $pre(wh1) = \neg 1_a$
- $pre(wh2) = \neg 2_a$

Ações

- se distinguimos duas ações, então distinguimos os estados resultantes da execução das mesmas

Ações

- se distinguimos duas ações, então distinguimos os estados resultantes da execução das mesmas
- estados que distinguimos antes da execução de uma ação continuamos a distinguir após a execução;

Ações

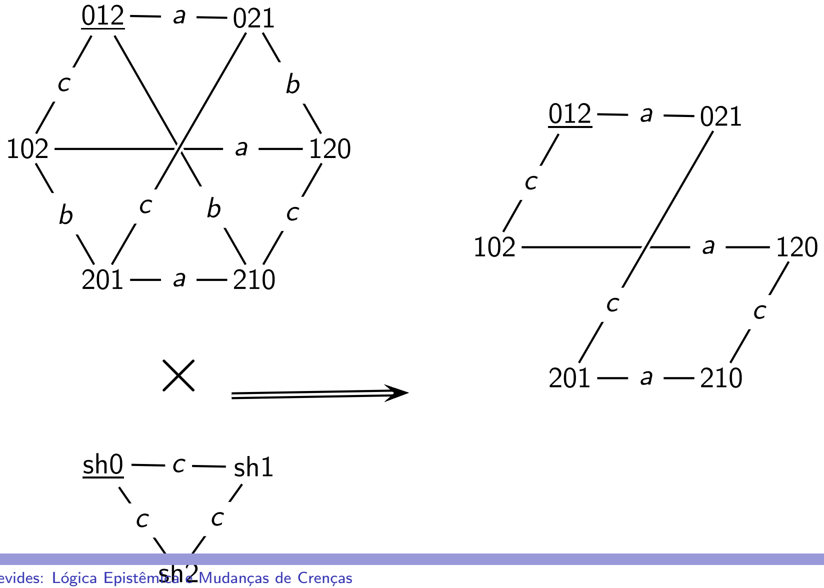
- se distinguimos duas ações, então distinguimos os estados resultantes da execução das mesmas
- estados que distinguimos antes da execução de uma ação continuamos a distinguir após a execução;
- ações só podem ser executadas em estados onde as suas pré-condições são satisfeitas.

Produto

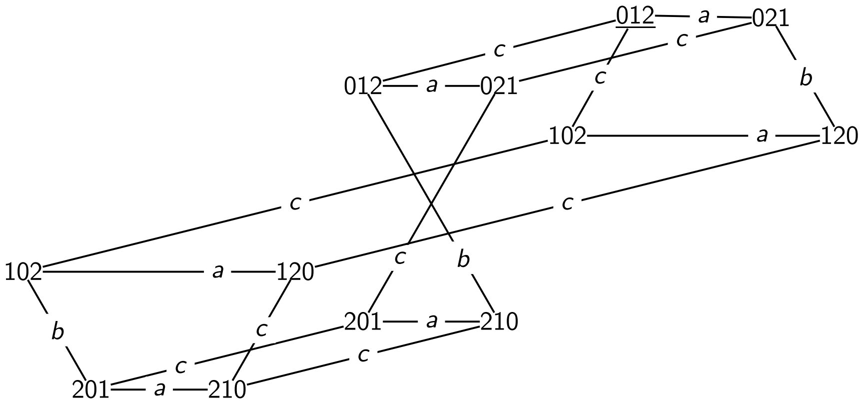
Dado um estado epistêmico $(\mathcal{M}, s)$ com $\mathcal{M} = \langle S, \sim_a, V\rangle$ e um modelo de ação (M, s) com $\mathsf{M} = \langle \mathsf{S}, \sim, \mathsf{pre}\rangle$. O resultado da execução (M, s) em $(\mathcal{M}, s)$ é $(\mathcal{M} \otimes \mathsf{M}, (s, \mathsf{s}))$ onde $\mathcal{M} \otimes \mathsf{M} = \langle S', \sim', V'\rangle$ de tal forma que:

1. $S' = \{(s, \mathsf{s})$ *de tal forma que* $s \in S, \mathsf{s} \in \mathsf{S},$ e $\mathcal{M}, s \models \mathsf{pre}(\mathsf{s})\}$
2. $(s, \mathsf{s}) \sim'_a (t, \mathsf{t})$ sse $(s \sim_a t$ e $\mathsf{s} \sim_a \mathsf{t})$
3. $(s, \mathsf{s}) \in V'(p)$ sse $s \in V(p)$

Ana mostra carta 0 p/ Beto



Ana sussrra p/ Beto ‘não 0’



Linguagem

$$\varphi \quad ::= \quad p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \land \varphi) \mid K_a\varphi \mid C_B\varphi \mid [\mathsf{M}, \mathsf{s}]\varphi$$

Semântica

$$
\begin{array}{lll}
M, s \models p & :\text{iff} & s \in V(p) \\
M, s \models \neg\varphi & :\text{iff} & M, s \not\models \varphi \\
M, s \models \varphi \wedge \psi & :\text{iff} & M, s \models \varphi \text{ and } M, s \models \psi \\
M, s \models K_a\varphi & :\text{iff} & \text{para todo } s' \in S : s \sim_a s' \text{ implica } M, s' \models \varphi \\
M, s \models [\mathrm{M}, \mathrm{s}]\varphi & :\text{iff} & M, s \models \mathrm{pre}(\mathrm{s}) \text{ implica } \; M \otimes \mathrm{M}, (s, \mathrm{s}) \models \varphi
\end{array}
$$

Semântica

- Mistura Sintaxe com Semântica?

SIM e NÃO

Axiomatização

$$[\mathsf{M},\mathsf{s}]p \leftrightarrow (\mathsf{pre}(\mathsf{s}) \rightarrow p)$$
$$[\mathsf{M},\mathsf{s}]\neg\varphi \leftrightarrow (\mathsf{pre}(\mathsf{s}) \rightarrow \neg[\mathsf{M},\mathsf{s}]\varphi)$$
$$[\mathsf{M},\mathsf{s}](\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow ([\mathsf{M},\mathsf{s}]\varphi \wedge [\mathsf{M},\mathsf{s}]\psi)$$
$$[\mathsf{M},\mathsf{s}]K_a\varphi \leftrightarrow (\mathsf{pre}(\mathsf{s}) \rightarrow \bigwedge_{\mathsf{s}\sim_a\mathsf{t}} K_a[\mathsf{M},\mathsf{t}]\varphi)$$
$$[\mathsf{M},\mathsf{s}][\mathsf{M}',\mathsf{s}']\varphi \leftrightarrow [(\mathsf{M},\mathsf{s});(\mathsf{M}',\mathsf{s}')]\varphi$$
De φ, infira $[\mathsf{M},\mathsf{s}]\varphi$

Toda fórmula da linguagem de Lógica de Modelos de Ação, sem conhecimento comum, é equivalente a uma fórmula na linguagem da Lógica Epistêmica.

Conclusões

- Desenvolver Linguagens e Algorítimos para Representar e Inferir sobre estas estruturas
- Sistemas Assíncronos e Distribuidos
- Probabilísticos
- Temporais