

# Introdução a Teoria dos Jogos

## *Tópicos Especiais em IA*

**Mario Benevides**

Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ

Instituto de Matemática

Departamento de Ciência da Computação

Março de 2012

# Curso

- Mario Benevides - mario@cos.ufrj.br
- Local: H-310 A
- Website:  
<http://www.cos.ufrj.br/mario/teia/teia.html>

# Objetivo do Curso

- Introduzir os conceitos básicos de teoria dos jogos
- O objetivo é analisar jogos estratégicos!
- Ferramentas p/ analisar situações onde ocorrem conflitos de interesse.

# O Que o Curso Não É...

- Jogos para entretenimento
- Jogos em computadores, ou jogos em redes
- Não iremos desenvolver/programar qualquer tipo de jogo

# Ementa

1. Motivação, Introdução e Exemplos de Jogos
2. Jogos em Forma Normal
3. Equilíbrio de Nash
4. Jogos em Forma Extensiva
5. Jogos Repetitivos
6. Jogos Evolucionários
7. Jogos com Mais de 2 Jogadores

# Bibliografia

1. Game Theory and Strategy, P. Straffin, 1993
2. A Prime in Game Theory, R. Gibbons, 1992
3. Game Theory for Applied Economists, Gibbons, 1992
4. A Course in Game Theory, Osborne e Rubinstein, 1994
5. Game Theory Evolving, H. Gintis, 2000
6. Uma Breve Intr. a Teoria de Jogos c/ Aplicações a Redes de Computadores, E. S. Silva e D. R. Figueiredo, 2007
7. An Introduction to Game Theory, M. J. Osborne, 2004

# Outros Cursos

1. Theory.net, <http://www.gametheory.net>
  - (a) Cursos,
  - (b) Softwares,
  - (c) Artigos
2. Daniel e Edmundo
  - (a) DCC 2007
  - (b) JAI - SBC
3. Notas do Curso do John Liu  
<http://www.cse.cuhk.edu.hk/~cslui>
4. Notas do Curso do Markus M. Möbius em Harvard

# Motivação

## 1. Problema 1:

- (a) Cada um na sala tem que escolher um número entre 0 e 100;
- (b) Eu calculo a média;
- (c) Ganha que tem o número mais perto (menor) que  $2/3$  da média;

## 2. Como se joga este jogo?



# Motivação

## 1. Como se joga este jogo?

- (a) A média é 50,  $2/3$  da média é 33;
- (b) Mas se todos pensarem assim a média será 33 e  $2/3$  da média será 21;
- (c) Mas se todos pensarem dessa forma ....;
- (d) O equilíbrio vai tender a zero.

## 2. Esta é uma forma de se pensar estrategicamente;

- (a) pensar no que os outros estão pensando;
- (b) conhecimento comum;;
- (c) racional: eu e meus parceiros;
- (d) antecipar a melhor jogada.

## 3. Teoria dos Jogos: Modelos “Racional Estrategicamente”

# Motivação

## 1. Problema 2:

- (a) **Leilão:** temos barra de cereal para leiloar. Ganha quem der o maior lance;
- (b) Lances são feitos sem conhecimento dos outros;
- (c) A melhor oferta ganha. Geralmente esta é acima da média;
- (d) A média tende a se aproximar do preço real.

# Motivação

## 1. Problema 3:

- (a) Você vai a um restaurante com amigos;
- (b) A conta vai ser dividida igualmente;
- (c) 3 pratos:
- (d) Peixe = R\$ 30,00
- (e) Camarão = R\$ 50,00
- (f) Lagosta = R\$ 70,00
- (g) Qual prato você pediria?

# O que é Teoria dos Jogos?

1. Uma maneira formal de se analisar interações entre grupos de agentes racionais que agem estrategicamente.
  - (a) Grupo;
  - (b) Interações;
  - (c) Estratégias;
  - (d) Racional;
  - (e) Conhecimento Comum.

# Jogo Estratégico

**Definição** (Forma Normal): Um jogo *estratégico em forma normal* consiste:

- um conjunto de jogadores  $J = \{1, \dots, I\}$ ;
- conjuntos de estratégias (ações)  $S_1, S_2, \dots, S_I$ , um para cada jogador;
- uma função de recompensa  $u_i : S_1 \times S_2 \times \dots \times S_I \mapsto \mathfrak{R}$ , uma para cada jogador.

Um *perfil de estratégias* é uma tupla  $s = s_1, s_2, \dots, s_I$  tal que  $s \in \mathcal{S}$ , onde  $\mathcal{S} = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_I$ . Nós definimos  $s_{-i}$  com o perfil obtido de  $s$  removendo  $s_i$ , i.e.,

$$s_{-i} = s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_I$$

# Exemplo de Jogo Estratégico

- Jogo: Zerinho ou Um;
- Jogadores: Luisa (linha) e Carlos (coluna);
- Número iguais Luisa ganha;
- números diferentes Carlos ganha;

	<b>0</b>	<b>1</b>
<b>0</b>	1,-1	-1,1
<b>1</b>	-1,1	1,-1

# Exemplo de Jogo Estratégico

- Jogo: Pedra, Papel e Tesoura;
- Jogadores: Luisa (linha) e Carlos (coluna);

	Pr	Pa	T
Pr	0,0	-1,1	1,-1
Pa	1,-1	0,0	-1,1
T	-1,1	1,-1	0,0

# Exemplo de Jogo Estratégico

- Jogo: Batalha dos Sexos;
- Jogadores: Luisa (linha) e Carlos (coluna);
- Luísa quer ir ao Ballet;
- Carlos ao Futebol;

	<b>F</b>	<b>B</b>
<b>F</b>	1,2	0,0
<b>B</b>	0,0	2,1



# Exemplo de Jogo Estratégico

- Jogo: Valente contra Medroso;
- Jogadores: Luis (linha) e Carlos (coluna);
- Numa ciclovia em direção oposta;
- D = Durão;
- M = Medroso;

	<b>D</b>	<b>M</b>
<b>D</b>	-1,-1	2,0
<b>M</b>	0,2	1,1

# Exemplo de Jogo Estratégico

- Jogo: Dilema do Prisioneiro
- C = Cooperar
- D = Delatar

	C	D
C	5,5	20,2
D	2,20	10,10

# Dominância

- Como Resolver um Jogo Estratégico?
- Curso Edmundo e Daniel DCC 2007
  - Transparências de 1– 15

# Dominância

- Exemplos: resolver usando elim. de estrat. fortemente dominada.

	A	B	C
A	2,2	1,1	4,0
B	1,2	4,1	3,5

	A	B	C	D
A	5,2	2,6	1,4	0,4
B	0,0	3,2	2,1	1,1
C	7,0	2,2	1,5	5,1
D	9,5	1,3	0,2	4,8

# Dominância

**Definição:** Uma de estratégia  $s_i$  é *estritamente dominada* para o jogador  $i$  por uma estratégia  $s'_i$  se para toda  $s_{-i}$

$$u_i(s'_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i})$$

Uma de estratégia  $s_i$  é *fracamente dominada* para o jogador  $i$  se substituimos o  $>$  por um  $\geq$ , mas para pelo menos um  $s_{-i}$  ela continua estrita.

# Dominância

- Exemplo de Jogo que não possui estratégia dominada mas possui solução

	E	C	D
T	0,4	4,0	5,3
M	4,0	0,4	5,3
F	3,5	3,5	6,6

- Eliminar estratégias fortemente dominadas pode não ser aplicável
- Mas sempre que é **dá certo**.

# Dominância

- Exemplo de Jogo que pode não funcionar eliminar estratégias fracamente dominadas

	E	D
T	4,4	2,3
F	4,5	5,5

- dependendo da ordem da eliminação: TE ou FD

	L	R
T	1,1	0,0
M	1,1	2,1
F	0,0	2,1

- dependendo da ordem da eliminação: TL ou FR

# Ponto de Sela

- Curso Edmundo e Daniel DCC 2007
  - Transparências de 17– 20
  - Nem todo jogo estratégico tem ponto de sela



# Equilíbrio de Nash Puro

**Definição:** Um perfil de estratégia  $s^*$  é um *equilíbrio puro de Nash* se e somente se

$$u_i(s^*) \geq u_i(s_i, s_{-i})$$

para todo jogador  $i$  e toda estratégia  $s_i \in S_i$ .

# Exemplo Jogo c. Único E. N.

- Jogo: Dilema do Prisioneiro

	C	D
C	5,5	20,2
D	2,20	10,10

- Jogo

	E	C	D
T	2,2	1,1	4,0
M	1,2	4,1	3,5

# Exem. Jogo c. Mais de um E. N.

- Linha: Luisa
- Coluna: Carlos

	1	1
1	3,3	2,5
2	5,2	1,1

- O que fazer?

# Ótimo de Pareto

“Um resultado de um jogo **não** é um ótimo de Pareto se existe um outro que dê a todos os jogadores um resultado melhor (pelo menos para um tem que ser estritamente melhor). Caso contrário, dizemos que o resultado é um Ótimo de Pareto.”

# Ótimo de Pareto

- Exemplo de Jogo que pode não funcionar eliminar estratégias dominadas

	E	D
T	7,7	2,8
F	8,2	5,5

- FF é um E.N. e TT, FT e TF são ótimos de Pareto

	C	D
A	3,3	-1,3
B	3,-1	0,0

- AA é um E.N. e ótimo de Pareto

# Estratégias Mistas

- Jogo: Pedra, Papel e Tesoura;
- Jogadores: Luisa (linha) e Carlos (coluna);

	Pr	Pa	T
Pr	0,0	-1,1	1,-1
Pa	1,-1	0,0	-1,1
T	-1,1	1,-1	0,0

- Este jogo não tem um EN puro.

# Estratégias Mistas

- Jogo: Zerinho ou Um;
- Jogadores: Luisa (linha) e Carlos (coluna);
- Número iguais Luisa ganha;
- números diferentes Carlos ganha;

	<b>0</b>	<b>1</b>
<b>0</b>	1,-1	-1,1
<b>1</b>	-1,1	1,-1

- Este jogo não tem um EN puro.

# Estratégias Mistas

- Jogo: Zerinho ou Um;
- Suponha que Luisa tem uma informação (Conhecimento) privilegiado que Carlos gosta mais de **1** do que **0**;
- Carlos joga  $3/4$  das vezes **1** e  $1/4$  **0**;
- $r_c: \mathbf{0} \mapsto 1/4$  e  $\mathbf{1} \mapsto 3/4$
- O que Luisa deve fazer?
- Qual seu ganho? **Ganho Médio**
- Ganho médio de Luisa se ela joga **0** =  
 $1/4 \times 1 + 3/4 \times -1 = -1/2$
- Ganho médio de Luisa se ela joga **1** =  
 $1/4 \times -1 + 3/4 \times 1 = 1/2$



# Estratégias Mistas

- Jogo: Zerinho ou Um;
- Suponha que Luisa tem 4 estratégias;
- Notação:  $G_{Luisa}(s, r) \equiv$  ganho de Luisa quando ela usa estratégia  $s$  e Carlos  $r$ ;
- Estratégia  $s_1, s_2, s_3$  e  $s_4$ ;
- Qual a melhor estratégia para Luisa?

# Estratégias Mistas

- Estratégia  $s_1$ :  $\mathbf{0} \mapsto 1/2$  e  $\mathbf{1} \mapsto 1/2$
- $G_{Luisa}(s_1, r_c) = 1/2 \times -1/2 + 1/2 \times 1/2 = 0$
- Estratégia  $s_2$ :  $\mathbf{0} \mapsto 1/3$  e  $\mathbf{1} \mapsto 2/3$
- $G_{Luisa}(s_2, r_c) =$   
 $1/3 \times -1/2 + 2/3 \times 1/2 = 1/6 \approx 0,16$
- Estratégia  $s_3$ :  $\mathbf{0} \mapsto 1/5$  e  $\mathbf{1} \mapsto 4/5$
- $G_{Luisa}(s_3, r_c) =$   
 $1/5 \times -1/2 + 4/5 \times 1/2 = 3/10 = 0,30$
- Estratégia  $s_4$ :  $\mathbf{0} \mapsto 0$  e  $\mathbf{1} \mapsto 1$
- $G_{Luisa}(s_4, r_c) =$   
 $0 \times -1/2 + 1 \times 1/2 = 1/2 = 0,50$

# Estratégias Mistas

- Qual o ganho médio de Carlos;
- $G_{Carlos}(s_1, r_c) = 1/4 \times (-1 \times 1/2 + 1 \times 1/2) + 3/4 \times (1 \times 1/2 + -1 \times 1/2) = 0$
- $G_{Carlos}(s_2, r_c) = 1/4 \times (-1 \times 1/3 + 1 \times 2/3) + 3/4 \times (1 \times 1/3 + -1 \times 2/3) = -1/6$
- $G_{Carlos}(s_3, r_c) = 1/4 \times (-1 \times 1/5 + 1 \times 4/5) + 3/4 \times (1 \times 1/5 + -1 \times 4/5) = -3/10$
- $G_{Carlos}(s_4, r_c) = 1/4 \times (-1 \times 0 + 1 \times 1) + 3/4 \times (1 \times 0 + -1 \times 1) = -1/2$
- Qual a melhor estratégia possível p/ Luisa?
- Qual a melhor estratégia possível p/ Carlos?

# Exercício

- Linha: Luisa
- Coluna: Carlos

	1	1
1	3,3	2,5
2	5,2	1,1

- Estratégia Carlos: Joga 1 com  $q = 1/2$
- Calcule o Ganho de Luisa e Carlos para  $p = 0$ ,  $p = 1/3$ ,  $p = 2/3$  e  $p = 1$

# Estratégias Mistas

- Jogo: Zerinho ou Um;
- Estratégia Luisa,  $s^*$   $\mathbf{0} \mapsto p$  e  $\mathbf{1} \mapsto (1-p)$
- Estratégia Carlos,  $r^*$   $\mathbf{0} \mapsto q$  e  $\mathbf{1} \mapsto (1-q)$
- Ganho médio Luisa, escolhe  $\mathbf{0} = G_{Luisa}^0(s^*, r^*)$
- $G_{Luisa}^0(s^*, r^*) = 1 \times q + -1 \times (1 - q) = 2q - 1$
- Ganho médio Luisa, escolhe  $\mathbf{1} = G_{Luisa}^1(s^*, r^*)$
- $G_{Luisa}^1(s^*, r^*) = -1 \times q + 1 \times (1 - q) = -2q + 1$
- Ganho Médio de Luisa é
- $G_{Luisa}(s^*, r^*) = p \times G_{Luisa}^0(s^*, r^*) + (1 - p) \times G_{Luisa}^1(s^*, r^*)$

# Estratégias Mistas

- Ganho Médio de Luisa é
- $G_{Luisa}(s^*, r^*) = p \times G_{Luisa}^0(s^*, r^*) + (1 - p) \times G_{Luisa}^1(s^*, r^*)$
- Se o ganho de Luisa for igual nas duas escolhas
- $G_{Luisa}^0(s^*, r^*) = G_{Luisa}^1(s^*, r^*)$
- O ganho médio de Luisa fica independente de sua estratégia  $s^*$
- $2q - 1 = -2q + 1 \therefore 4q = 2 \therefore q = 1/2$
- $G_{Luisa}(s^*, r^*) = G_{Luisa}^0(s^*, r^*) = G_{Luisa}^1(s^*, r^*)$
- $G_{Luisa}(s^*, r^*) = 2q - 1 = -2q + 1 = 0$

# Estratégias Mistas

- Ganho Médio para Carlos
- $G_{Carlos}^0(s^*, r^*) = -1 \times p + 1 \times (1 - p) = 1 - 2p$
- $G_{Carlos}^1(s^*, r^*) = 1 \times p + -1 \times (1 - p) = 2p - 1$
- $G_{Carlos}(s^*, r^*) = q \times G_{Carlos}^0(s^*, r^*) + (1 - q) \times G_{Carlos}^1(s^*, r^*)$
- Se o ganho de Carlos for igual nas duas escolhas
- $G_{Carlos}^0(s^*, r^*) = G_{Carlos}^1(s^*, r^*)$
- O ganho Carlos fica independente da estratégia  $r^*$
- $2p - 1 = 1 - 2p \therefore 4p = 2 \therefore p = 1/2$

# Estratégias Mistas

- Ganho Médio para Carlos
- $G_{Carlos}(s^*, r^*) = G_{Carlos}^0(s^*, r^*) = G_{Carlos}^1(s^*, r^*)$
- $G_{Carlos}(s^*, r^*) = 2p - 1 = -2p + 1 = 0$



# Estratégias Mistas

- Este é o Eq. Nash Misto:
  - Luisa:  $\mathbf{0} \mapsto p=1/2$  e  $\mathbf{1} \mapsto (1-p)=1/2$
  - Carlos:  $\mathbf{0} \mapsto q=1/2$  e  $\mathbf{1} \mapsto (1-q)=1/2$
- Ganho médio de cada no Eq. de Nash
  - Luisa:  
$$G_{Luisa}(s^*, r^*) = 2q - 1 = -2q + 1 = 0$$
  - Carlos:  
$$G_{Carlos}(s^*, r^*) = 2p - 1 = -2p + 1 = 0$$
- Desenho das Retas
- Discutir porque é Eq. Nash.

# Função de Melhor Resposta

- Ganho Médio para Carlos
- $G_{Carlos}^0(s^*, r^*) = 1 - 2p$
- $G_{Carlos}^1(s^*, r^*) = 2p - 1$
- $G_{Carlos}(s^*, r^*) = q \times G_{Carlos}^0(s^*, r^*) + (1 - q) \times G_{Carlos}^1(s^*, r^*)$
- $G_{Carlos}(s^*, r^*) = q \times (1 - 2p) + (1 - q) \times (2p - 1)$
- Ganho Médio de Luisa é
- $G_{Luisa}(s^*, r^*) = p \times G_{Luisa}^0(s^*, r^*) + (1 - p) \times G_{Luisa}^1(s^*, r^*)$
- $G_{Luisa}(s^*, r^*) = p \times (2q + 1) + (1 - p) \times (1 - 2q)$

# Função de Melhor Resposta

- Qual a melhor estratégia para Luisa dado a estratégia escolhida Carlos?
- Carlos escolhe  $q$ , qual a melhor resposta de Luisa?
- $G_{Luisa}(s^*, r^*) = 2 \times (2q - 1)p + (1 - 2q)$
- desenhar  $p/q = 0$ ; calcular a melhor resposta
- desenhar  $p/q = 1$  calcular a melhor resposta
- desenhar  $p/q = 1/2$  calcular a melhor resposta

# Função de Melhor Resposta

- Qual a melhor estratégia para Carlos dado a estratégia escolhida Luisa?
- Luisa escolhe  $p$ , qual a melhor resposta de Carlos?
- $G_{Carlos}(s^*, r^*) = 2 \times (1 - 2p)q + (2q - 1)$
- desenhar  $p/ p = 0$ ; calcular a melhor resposta
- desenhar  $p/ p = 1$  calcular a melhor resposta
- desenhar  $p/ p = 1/2$  calcular a melhor resposta

# Eq. Nash Misto

- Luisa:  $\mathbf{0} \mapsto p=1/2$  e  $\mathbf{1} \mapsto (1-p)=1/2$
- Carlos:  $\mathbf{0} \mapsto q=1/2$  e  $\mathbf{1} \mapsto (1-q)=1/2$
- Suponha Carlos sai do EN com  $q = 1/4$
- $G_{Luisa}(s^*, r^*) = 2 \times (2p - 1)q + (1 - 2p)$
- $G_{Luisa}(s^*, r^*) = 2 \times (2p - 1)1/4 + (1 - 2p) = 1/2 - p$
- Máximo  $p = 0 \therefore G_{Luisa}(s^*, r^*) = 1/2$
- $G_{Carlos}(s^*, r^*) = 2 \times (1 - 2q)p + (2q - 1) = -1/2$

# Eq. Nash Misto

- Suponha Carlos sai do EN com  $q = 3/4$
- $G_{Luisa}(s^*, r^*) = 2 \times (2p - 1)3/4 + (1 - 2p) = p - 1/2$
- Máximo  $p = 1 \therefore G_{Luisa}(s^*, r^*) = 1/2$
- $G_{Carlos}(s^*, r^*) = 2 \times (1 - 2q)p + (2q - 1) = -1/2$

Qq tentativa de desviar **unilateralmente** do EN pode levar a um ganho pior.

# Estratégias Mistas

- Jogadores: Luisa (linha) e Carlos (coluna);
- Este jogo não tem Eq. Nash Puro;

	E	D
T	1,1	0,4
F	0,2	2,1

- Luisa: **T**  $\mapsto$  p e **F**  $\mapsto$  (1-p)
- Carlos: **E**  $\mapsto$  q e **D**  $\mapsto$  (1-q)
- Calcular o Eq. Nash Misto
- Função de Ganho de Luisa e Carlos
- Desenhar as funções
- Variar a estratégia de Carlos acima e abaixo do equilíbrio e calcular os ganhos dos dois maximizando para Luisa.

# Eq. Nash Misto

- Jogadores: Luisa (linha) e Carlos (coluna);
- Luisa: T  $\mapsto$  p e F  $\mapsto$  (1-p)
- Carlos: E  $\mapsto$  q e R  $\mapsto$  (1-q)

	E	D
T	$a_1, a_2$	$b_1, b_2$
F	$c_1, c_2$	$d_1, d_2$

- $G_{Luisa}^T = a_1 \cdot q + b_1 \cdot (1 - q)$
- $G_{Luisa}^F = c_1 \cdot q + b_1 \cdot (1 - q)$
- $G_{Carlos}^E = a_2 \cdot p + c_2 \cdot (1 - p)$
- $G_{Carlos}^D = b_2 \cdot p + d_2 \cdot (1 - p)$



# Eq. Nash Misto

- No Equilibrio:  $G_{Luisa}^T = G_{Luisa}^F$
- $a_1 \cdot q + b_1 \cdot (1 - q) = c_1 \cdot q + b_1 \cdot (1 - q)$
- $q = (d_1 - b_1) / (d_1 - b_1 + a_1 - c_1)$
- No Equilibrio:  $G_{Carlos}^T = G_{Carlos}^F$
- $a_2 \cdot p + c_2 \cdot (1 - p) = b_2 \cdot p + d_2 \cdot (1 - p)$
- $p = (d_2 - c_2) / (d_2 - c_2 + a_2 - b_2)$
- É possível ter  $p$  e  $q$  negativos? Desenhe um jogo em que isto ocorre;
- Explique qual é o equilíbrio neste caso;
- Lembrar são probabilidades:  $0 \leq p, q \leq 1$ .

# Teorema de Equilíbrio de Nash

Todo Jogo Estratégico Finito tem pelo menos um Equilíbrio de Nash Puro ou Misto.

# Modelo de Duopólio de Cournot

- Duas Empresas: 1 e 2
- produzem o mesmo produto;
- $q_i$  quantidade de produto produzido pela empresa  $i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ ;
- $C_i(q_i)$  custo da firma  $i$  produzir a quantidade  $q_i$ ;
- $Q = q_1 + q_2$  quantidade produto no mercado;
- $P(Q)$  é o preço que o mercado paga pelo produto. Só depende de  $Q$ .
- Lucro da empresa  $i$ ,

$$U_i(q_i, Q) = q_i \cdot P(Q) - C_i(q_i);$$

# Modelo de Duopólio de Cournot

- Custo fixo por unidade:  $C_i(q_i) = c \cdot q_i$
- Seja  $D$  a demanda do mercado;
- $P(Q) = (D - Q)$ , modelo simples;
  - $P(Q) = 0$ , se  $D \leq Q$
  - $c < D$  e  $q_i \geq 0$  e  $q_i \leq D$
- Lucro da empresa  $i$ ,

$$U_i(q_i, Q) = q_i \cdot (D - Q) - c \cdot q_i;$$

- $U_i(q_i, Q) = q_i \cdot (D - (q_1 + q_2) - c);$
- $U_1(q_1, Q) = -q_1^2 + (D - q_2 - c)q_1;$

# Modelo de Duopólio de Cournot

- $U_1(q_1, Q) = -q_1^2 + (D - q_2 - c)q_1$ ;
- $U_2(q_2, Q) = -q_2^2 + (D - q_1 - c)q_2$ ;
- derivando e igualando a 0:
- $-2q_1 + (D - q_2 - c) = 0$ ;
- $-2q_2 + (D - q_1 - c) = 0$ ;

$$q_1 = \frac{D - q_2 - c}{2} \qquad q_2 = \frac{D - q_1 - c}{2}$$

# Modelo de Duopólio de Cournot

- Substituindo

$$q_1 = \frac{D - c}{3} \quad q_2 = \frac{D - c}{3}$$

- Este é um **Eq. de Nash**.
- Porque este valor maximiza os ganhos da empresa 1 e 2.

# Modelo de Duopólio de Cournot

- Substituindo  $q_1$  e  $q_2$  na quantidade e no preço

$$Q = \frac{2 \cdot (D - c)}{3} \quad P(Q) = \frac{D + 2 \cdot c}{3}$$

- Suponha que só temos uma empresa  $q_2 = 0$   
 $q_1 = \frac{D - c}{2}$
- recalculando a quantidade e o preço

$$Q = \frac{(D - c)}{2} \quad P(Q) = \frac{D + c}{2}$$

- **Quantidade menor e Preço maior.**

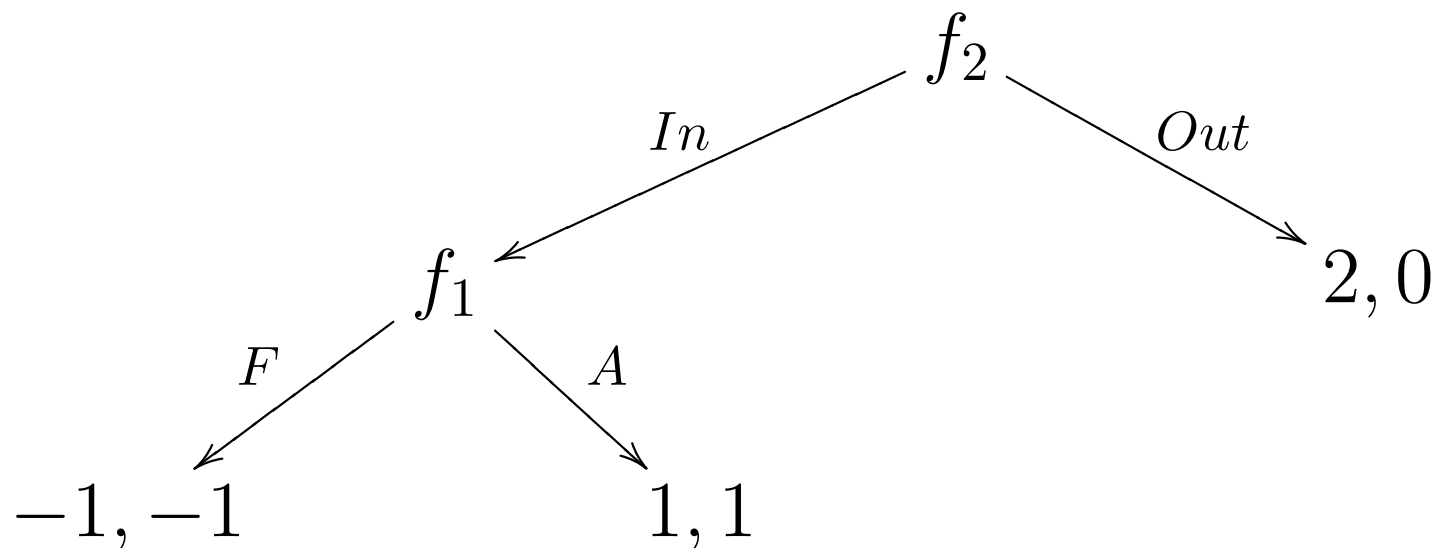
# Jogos Extensivos

- Jogos em Sequência;
- Cada jogador joga no seu turno;
- Normalmente representado em forma de **Árvore**;
- Cada nó da árvore representa as escolhas do jogador que tem a vez;
- folhas temos as recompensas de cada jogador se o jogo tivesse seguido por aquele ramo.



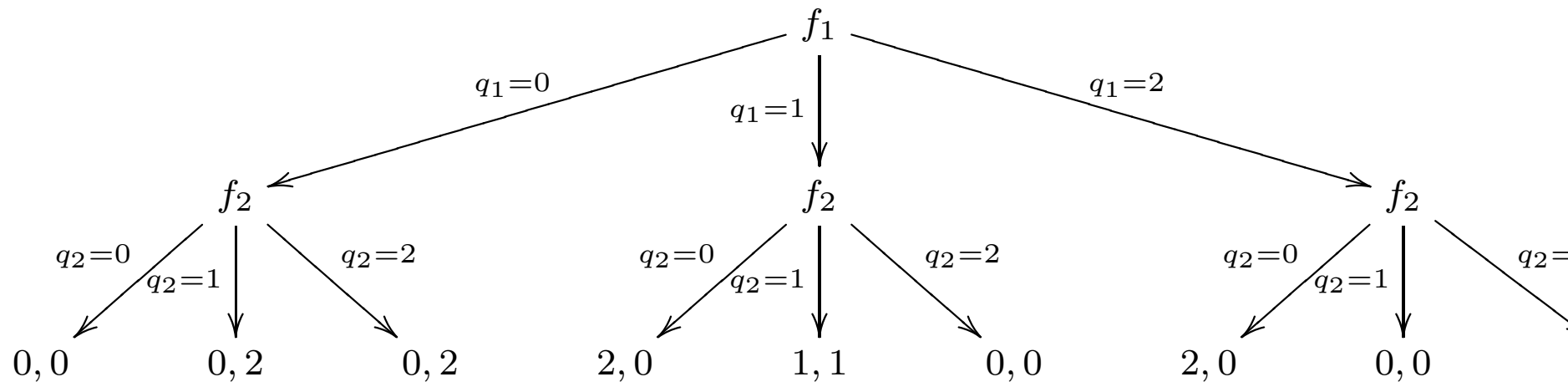
# Exemplo de Jogo Extensivo

- Duas firmas  $f_1$  e  $f_2$  produzem o mesmo produto;
- A firma  $f_1$  já lançou o produto no mercado;
- A firma  $f_2$  tem a escolha de entrar no mercado ou sair;
- A firma  $f_1$  pode comprar a briga ou acomodar com  $f_2$ ;



# Ex.: Competição de Stackelberg

- Duas firmas  $f_1$  e  $f_2$  produzem o mesmo produto;
- A firma  $f_1$  pode lançar o produto antes de  $f_2$ ;
- $q_i \in \{0, 1, 2\}$ , quantidade que a firma  $f_i$  pode produzir;



# Jogos Extensivos

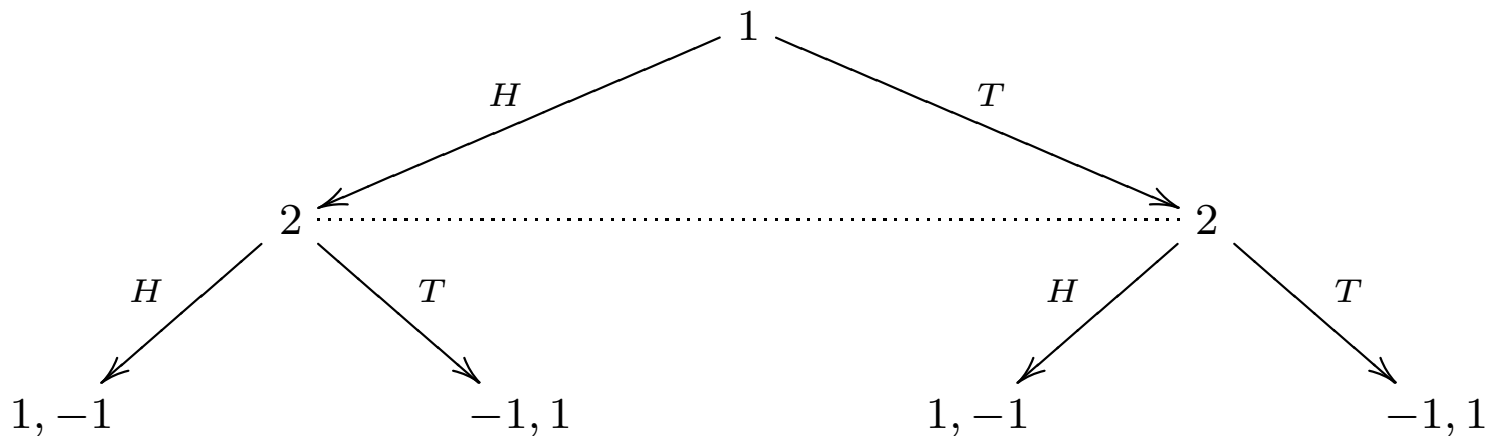
**Definição:** Um *jogo extensivo finito* consiste:

- Conj. finito de jogadores  $i \in \{1, \dots, n\}$ ;
- Uma árvore finita com um conjunto  $T$  de nós, sendo  $Z \subseteq T$  o conjunto das folhas e para todo nó  $t \notin Z$ :
  - $i(t)$  é o jogador que tem a vez em  $t$ ;
  - $A(t)$  é o conjunto as possíveis ações em  $t$ ;
  - $N(t, a)$  é o nó sucessor de  $t$  após a execução de  $a$  em  $t$ ;
- Função de recompensa  $u_i : Z \mapsto \mathfrak{R}$ ;
- $h(t)$  é conjunto de nós que o jogador  $i(t)$  não distingue de  $t$  dado o que ele sabe até o momento.  $h$  deve satisfazer:

$$t' \in h(t) \Rightarrow i(t) = i(t'), A(t) = A(t') \text{ and } h(t) = h(t')$$

# Jogos Extensivos

- Cara/Coroa Duas Moeda



- Linha **pontilhada** = jogador 2 não sabe a jogada anterior do jogador 2
- 2 não distingue estes dois estados do jogo
- 2 sabe que 1 jogou mas não sabe qual ação ele escolheu

# Cara/Coroa Duas Moeda

Exercício: Preencher a definição para o exemplo

- Jogadores  $i \in \{1, 2\}$ ;
- $T$  e  $Z \subseteq T$ :
  - $i(t)$ :
  - $A(t)$ :
  - $N(t, a)$ :
- Função de recompensa  $u_i : Z \mapsto \mathbb{R}$ :
- $h(t)$ :

# Jogos Extensivos

- **Informação Perfeita:**

$h(t)$  é sempre um conjunto unitário

O jogador sabe exatamente o nó em que está

- **Informação Imperfeita:**

$|h(t)| > 1$  é sempre um conjunto com mais de um elemento

O jogador não sabe exatamente o nó em que está

# Análise de Jogos Extensivos

- **Transformando em Jogo Estratégico:**
- Todo Jogo Extensivo pode ser transformado num jogo Estratégico
- Curso Daniel Edmundo DCC 2007  
Transparência de 38-44
- Curso do MM  
Aula 10: pagina 4-10
- Fazer exercício com a turma com o jogo página 104 do Osborne

# Análise de Jogos Extensivos

- **Sub-Jogo:**
- Um jogo  $G'$  é um sub-jogo de um jogo  $G$  se
  1.  $T' \subseteq T$ , ie,  $T'$  é uma sub árvore de  $T$  e para todo  $t \in T'$ , se  $t' \in h(t)$  então  $t' \in T'$ .
  2. todos os outros conjuntos,  $h(t)$ ,  $i(t)$ ,  $A(t)$ ,  $N(t, a)$ , as funções de recompensa  $u_i(t)$  permanecem iguais só que restritas aos nós em  $T'$ .



# Análise de Jogos Extensivos

- **Indução as Traz-para-Frente:**
- Curso do MM  
Aula 11: pagina 1-7
- Fazer exercício com a turma com um jogo com dois sub-jogos imperfeitos: s15 e s120

# Palestra: Logic Puzzles

**Hans van Ditmarsch:**

Since the 1940s various so-called epistemic puzzles have become known, wherein typically announcements of ignorance surprisingly lead to knowledge, or employing other puzzling ways to make individual knowledge into common knowledge. A well-known example is the Muddy Children Problem. Far too well-known, so this talk will NOT be about the Muddy Children Problem. Instead, we will present and analyze some other, possibly less well-known puzzles. Two examples are given below.

# Palestra: Logic Puzzles

**What is my number?:**

Each of agents Anne, Bill, and Cath has a positive integer on its forehead. They can only see the foreheads of others. One of the numbers is the sum of the other two. All the previous is common knowledge. The agents now successively make the truthful announcements:

- Anne: I do not know my number. - Bill: I do not know my number. - Cath: I do not know my number. - Anne: I know my number. It is 50.

What are the other numbers?

# Palestra: Logic Puzzles

## **One hundred prisoners and a lightbulb:**

A group of 100 prisoners, all together in the prison dining area, are told that they will be all put in isolation cells and then will be interrogated one by one in a room containing a light with an on/off switch. The prisoners may communicate with one another by toggling the light-switch (and that is the only way in which they can communicate). The light is initially switched off. There is no fixed order of interrogation, or interval between interrogations, and the same prisoner may be interrogated again at any stage. When interrogated, a prisoner can either do nothing, or toggle the light-switch, or announce that all prisoners have been interrogated. If that announcement is true, the prisoners will (all) be set free, but if it is false, they will all be executed. While still in the dining room, and before the prisoners go to their isolation cells (forever), can the prisoners agree on a protocol that will set them free (assuming that at any stage every prisoner will be interrogated again sometime)?

# Jogos Repetidos Fintamente

- Curso Daniel e Edmundo DCC 2007  
(Intro\_TJ\_2)
  - Transparência de 01-04

# Jogos Repetidos Fintamente

- Dilema do Prisioneiro
- C = Cooperar
- D = Delatar

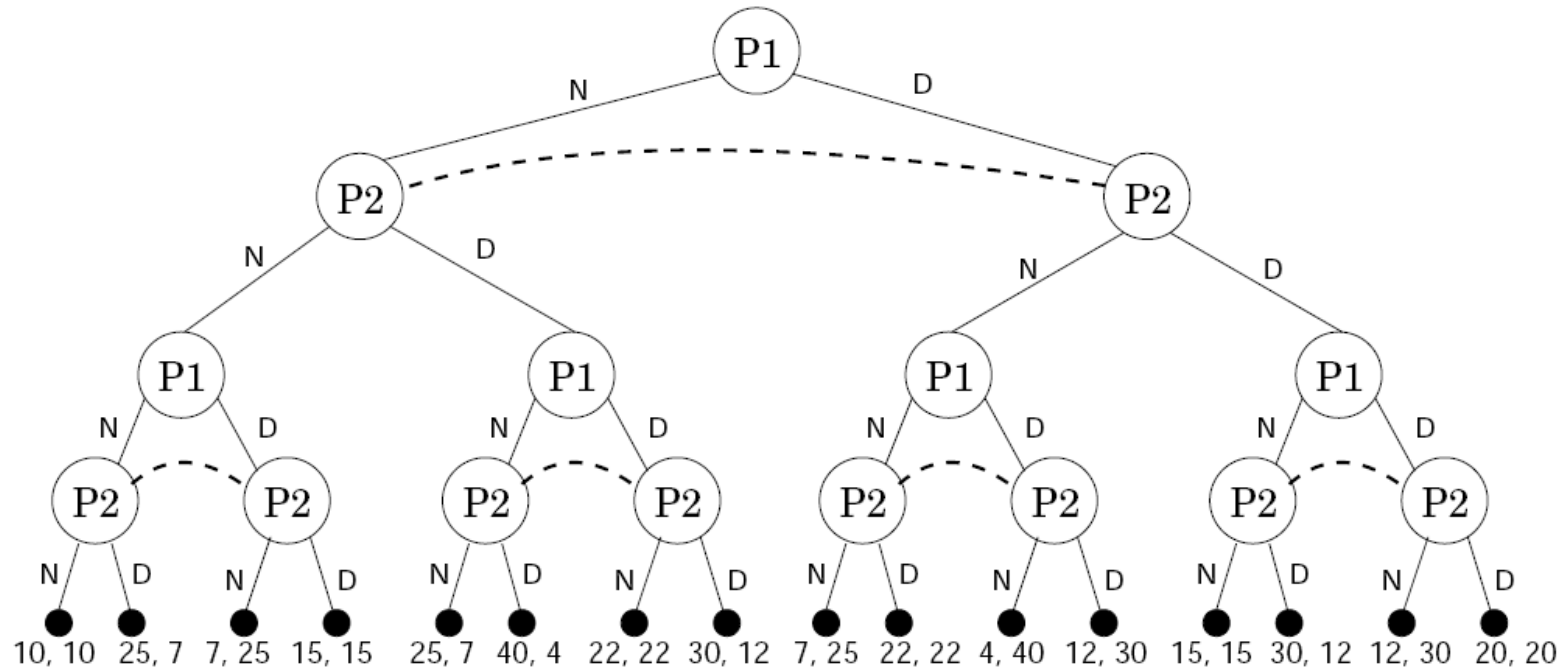
	C	D
C	5,5	20,2
D	2,20	10,10

# Jogos Repetidos Fintamente

- Dilema do Prisioneiro
- O jogo é repetido um número finito de vezes
- Modelado como jogo Extensivo
- A cada iteração somam-se as recompensas
- Jogo com ou sem Informação Perfeita
  - A cada iteração o jogador pode ou não saber as jogadas anteriores
- Solução: Indução de Traz p/ Frente

# Jogos Repetidos Fintamente

- Dilema do Prisioneiro jogado 2 vezes





# Jogos Repetidos Fintamente

**Teorema** (Gibbons pg. 84): Se um jogo estratégico  $G$  tem um único EN, então seu jogo repetido  $n$  vezes tem um único Eq. de Subjogo, que é o nó correspondente a se jogar o EN do jogo original  $n$  vezes.

- Resolver o exemplo a cima com Informação Imperfeita
- Resolver o exemplo a cima com Informação Perfeita

# Jogos Repetidos Infintamente

- Curso Daniel e Edmundo DCC 2007  
(Intro\_TJ\_2)
  - Transparência de 05-16

# Jogos Repetidos Infintamente

- O jogo é repetido um número infinito de vezes
- Modelado como jogo Extensivo
- Como resolver?
- Não dá para usar Indução de Traz p/ Frente

# Jogos Repetidos Infintamente

- Motivação:
  - A cada iteração o jogador pode continuar ou “parar”
  - Se continuar tem sua recompensa reduzida por um fator  $\delta$ , onde  $0 \leq \delta \leq 1$
- fazer com a turma o Dilema do Prisioneiro

	C	D
C	5,5	20,2
D	2,20	10,10

# Jogos Repetidos Infintamente

- Fator de desconto  $\delta$
- Recompensas no futuro valem menos
- Dada uma estratégia cuja recompensa é  $c$ ,
- Se ela for repetida  $k$  vezes, a recompensa na fase  $k$  será  $c.\delta_k$
- Se esta estratégia for repetida para sempre (infinitamente)

$$\sum_{k=0}^{\infty} c.\delta^k$$

# Jogos Repetidos Infintamente

- Este somatório sempre converge:

- $\sum_{k=0}^{\infty} c \cdot \delta^k < \infty$

- Recompensa  $c$  do jogo base é limitada superiormente

Máximo que pode ganhar no jogo base

- $0 \leq \delta \leq 1$

# Teoria dos Jogos Evolucionários

- Jogos Evolutivos
- Dinâmica do Replicador
- Estratégias Evolucionariamente Estáveis (ESS)

# Teoria dos Jogos Evolucionários

- Curso Daniel e Edmundo DCC 2007
  - Intro\_TJ\_evol.pdf
  - Transparência de 01-19
- Curso do John Liu
  - <http://www.cse.cuhk.edu.hk/cslui/csc6480.html>
  - Population Games
  - Replicator Dynamics



# Teoria dos Jogos Evolucionários

- Curso Daniel e Edmundo DCC 2007  
(Intro\_TJ\_2)
  - Transparência de 01-08
  - Desenhar com a turma ex. transp. 08
- Curso do John Liu
  - <http://www.cse.cuhk.edu.hk/cslui/csc6480.html>
  - Replicator Dynamics

# Dinâmica do Replicador

- É um tipo específico de Jogo Evolucionário
- População de jogadores muito grande (infinita)
- Indíduos usam um conjunto fixo de estraégias  
 $S = \{s_1, \dots, s_k\}$
- Estado do jogo é proporção de indivíduos usando cada estatégia
- $\mathbf{X} = \langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle$
- Uma matrix de pagamentos:  $\pi(s_i, s_j)$ 
  - $\pi(s_i, s_j)$ : recompensa de cada jogador que escolhe e  $s_i$  contra  $s_j$
  - Jogo Simétrico

# Dinâmica do Replicador

- Exemplo: Dilema do Prisioneiro

	C	D
C	3,3	0,5
D	5,0	1,1

- $S = \{C, D\}$
- $\pi(C, C) = 3, \pi(C, D) = 0, \pi(D, C) = 5$  e  
 $\pi(D, D) = 1$
- $\mathbf{X} = \langle 0.6, 0.4 \rangle$

# Recompensa

- Recompensa média de um jogador que escolhe a estratégia  $s_i$

$$\pi(s_i, \mathbf{X}) = \sum_{j=1}^k x_j \times \pi(s_i, s_j)$$

- Média das recompensas de  $s_i$  ponderada pelo  $\mathbf{X}$

# Recompensa

- $\pi(s_i, \mathbf{X}) = \sum_{j=1}^k x_j \times \pi(s_i, s_j)$
- Exemplo; Dilema do Prisioneiro
  - $\pi(C, C) = 3, \pi(C, D) = 0, \pi(D, C) = 5$  e  $\pi(D, D) = 1$
  - $\mathbf{X} = \langle 0.6, 0.4 \rangle$
  - $\pi(C, \mathbf{X}) = \sum_{j=1}^2 x_j \times \pi(s_i, s_j) =$   
 $x_1 \times \pi(s_1, s_1) + x_2 \times \pi(s_1, s_2) =$   
 $0.6 \times \pi(C, C) + 0.4 \times \pi(C, D) = 0.6 \times 3 + 0.4 \times 0 = 1,8$
  - $\pi(D, \mathbf{X}) = \sum_{j=1}^2 x_j \times \pi(s_i, s_j) =$   
 $x_1 \times \pi(s_2, s_1) + x_2 \times \pi(s_2, s_2) =$   
 $0.6 \times \pi(D, C) + 0.4 \times \pi(D, D) = 0.6 \times 5 + 0.4 \times 1 = 3,4$

# Recompensa do Jogo

- Recompensa média do jogo
- Média das recompensas dos jogadores que escolheram de  $s_i$  ponderada pelo  $\mathbf{X}$

$$\bar{\pi}(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^k x_j \times \pi(s_j, \mathbf{X})$$

- Exemplo; Dilema do Prisioneiro
  - $\pi(C, \mathbf{X}) = 1,8$     $\pi(D, \mathbf{X}) = 3,4$
  - $\bar{\pi}(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^k x_j \times \pi(s_j, \mathbf{X}) =$   
 $x_1 \times \pi(C, \mathbf{X}) + x_2 \times \pi(D, \mathbf{X}) = 0.6 \times 1.8 + 0.4 \times 3.4 =$   
 $1.08 + 1.36 = 2.44$

# Transições

- Mudanças de estado
- Re-Calcular  $\mathbf{X}$
- Quanto da população que está jogando  $s_i$  vai mudar de estado no próximo instante de tempo  $x'_i$

$$x'_i = (\pi(s_i, \mathbf{X}) - \bar{\pi}(\mathbf{X})) \times x_i$$

- Quanto mais a recompensa de uma estratégia está acima da média mais atraente ela é, mais indivíduos de outras estratégias vão querer mudar para ela.
  - $x'_1 = (\pi(C, \mathbf{X}) - \bar{\pi}(\mathbf{X})) \times x_1 = (1.8 - 2.44) \times 0.6 = -0.384$
  - $x'_2 = (\pi(D, \mathbf{X}) - \bar{\pi}(\mathbf{X})) \times x_2 = (3.4 - 2.44) \times 0.4 = 0.384$
  - Novo:  $\mathbf{X} = \langle 0.6 - 0.384, 0.4 + 0.384 \rangle = \langle 0.216, 0.784 \rangle$

# Exercícios:

- Faça mais 2 rodadas no Dil. do Prisioneiro
- está convergindo para o EN? Coincidência?
- Faça 3 rodadas para o seguinte jogo:

	A	B	C
A	4,4	2,6	08
B	6,2	10,10	6,2
C	8,0	6,2	4,4

- $\mathbf{X} = \langle 0.4, 0.1, 0.5 \rangle$
- Está convergindo?



# Ponto Fixo

- Quando a recompensa fica igual a média temos um equilíbrio
- $x'_i = 0$ , para todas as estratégias  $s_i$
- Este é um ponto fixo do jogo
- Exemplo: Dilema do Prisioneiro

	C	D
C	3,3	0,5
D	5,0	1,1

- $\mathbf{X} = \langle x, 1 - x \rangle$
- Quais os pontos fixos?

# Ponto Fixo

- E se o jogo tiver mais de um E. Nash, para onde ele converge?
- Exemplo: Maracanã  $\times$  Ballet

	M	B
M	3,3	0,1
B	1,0	2,2

1.  $\mathbf{X} = \langle 0.2, 0.8 \rangle$ , simule 3 roddas
  2.  $\mathbf{X} = \langle 0.8, 0.2 \rangle$ , simule 3 roddas
  3.  $\mathbf{X} = \langle x, 1 - x \rangle$ , Quais os pontos fixos?
- Existe alguma relação entre P. F. e E. N?

# Relação PF e EN

**Teorema:** Seja  $J$  um jogo simétrico,  $S = \{s_1, s_2\}$  e  $\sigma^* = \langle p^*, 1 - p^* \rangle$  um **EN**. Então a população  $\mathbf{X}^* = \langle x^*, 1 - x^* \rangle$ , com  $x^* = p^*$  é um **Ponto Fixo**.

**Prova:**

- Como  $\sigma^*$  é NE  $\pi(s_1, \sigma^*) = \pi(s_1, \sigma^*)$
- $\pi(s_1, \sigma^*) = \pi(s_1, \mathbf{X}^*)$ , por hipótese
- $\bar{\pi}(\mathbf{X}^*) = x^* \pi(s_1, \mathbf{X}^*) + (1 - x^*) \pi(s_2, \mathbf{X}^*)$
- $x'^* = x^* (\pi(s_1, \mathbf{X}^*) - \bar{\pi}(\mathbf{X}^*))$
- $x'^* = x^* (1 - x^*) (\pi(s_1, \mathbf{X}^*) - \pi(s_2, \mathbf{X}^*))$
- Logo,  $x'^* = 0$

# Jogos Evolucionários

- População de jogadores muito grande (infinita)
- Indíduos usam um conjunto fixo de estratégias  
 $S = \{s_1, \dots, s_k\}$
- Estado do jogo é proporção de indivíduos usando cada estratégia
- $\mathbf{X} = \langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle$
- Uma matrix de pagamentos:  $\pi(s_i, s_j)$ 
  - $\pi(s_i, s_j)$ : recompensa de cada jogador que escolhe  $s_i$  contra  $s_j$
  - Jogo Simétrico

# Recompensa do jogador

- $\pi(s_i, \mathbf{X}) = \sum_{j=1}^k x_j \times \pi(s_i, s_j)$
- Exemplo; Dilema do Prisioneiro
  - $\pi(C, C) = 3, \pi(C, D) = 0, \pi(D, C) = 5$  e  $\pi(D, D) = 1$
  - $\mathbf{X} = \langle 0.6, 0.4 \rangle$
  - $\pi(C, \mathbf{X}) = \sum_{j=1}^2 x_j \times \pi(s_i, s_j) =$   
 $x_1 \times \pi(s_1, s_1) + x_2 \times \pi(s_1, s_2) =$   
 $0.6 \times \pi(C, C) + 0.4 \times \pi(C, D) = 0.6 \times 3 + 0.4 \times 0 = 1,8$
  - $\pi(D, \mathbf{X}) = \sum_{j=1}^2 x_j \times \pi(s_i, s_j) =$   
 $x_1 \times \pi(s_2, s_1) + x_2 \times \pi(s_2, s_2) =$   
 $0.6 \times \pi(D, C) + 0.4 \times \pi(D, D) = 0.6 \times 5 + 0.4 \times 1 = 3,4$

# Jogos Evolucionários

- Indíduos usam um conjunto fixo de estratégias **mistas**  $\sigma$  sobre  $S = \{s_1, \dots, s_k\}$
- Estado do jogo é proporção de indivíduos usando cada estratégia
- $\mathbf{X} = \langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle$
- $\sigma = \langle p_1, \dots, p_k \rangle$   
 $p_i$  é a probabilidade do jogador escolher  $s_i$
- Uma matrix de pagamentos:  $\pi(s_i, s_j)$ 
  - $\pi(s_i, s_j)$ : recompensa de cada jogador que escolhe  $s_i$  contra  $s_j$
  - Jogo Simétrico

# Jogos Evolucionários

**Definição:** Dado um indivíduo que está utilizando uma estratégia  $\sigma$  numa distribuição da população  $\mathbf{X}$ . A recompensa deste indivíduo é dada por

$$\pi(\sigma, \mathbf{X}) = \sum_{s \in S} p(s) \times \pi(s, \mathbf{X})$$

$$\pi(\sigma, \mathbf{X}) = \sum_{s \in S} \sum_{s' \in S} p(s) \times x(s') \times \pi(s, s')$$

# Jogos Evolucionários

- Exemplo; Dilema do Prisioneiro
- $\pi(C, C) = 3$ ,  $\pi(C, D) = 0$ ,  $\pi(D, C) = 5$  e  $\pi(D, D) = 1$
- $\mathbf{X} = \langle 0.6, 0.4 \rangle$  e
- $\sigma = \langle 1/4, 3/4 \rangle$

$$\pi(C, \mathbf{X}) = 0.6 \times 3 + 0.4 \times 0 = 1,8$$

$$\pi(D, \mathbf{X}) = 0.6 \times 5 + 0.4 \times 1 = 3,4$$

- $\pi(\sigma, \mathbf{X}) = \sum_{s \in S} p(s) \times \pi(s, \mathbf{X}) =$   
 $1,8 \times 1/4 + 3,4 \times 3/4 = 0,45 + 2,55 = 3$



# Jogos Evolucionários

**Definição:** Dada uma população  $X$  que está utilizando uma estratégia  $\sigma^*$ . Suponha que uma pequena parte desta população  $\epsilon$  decida utilizar uma nova estratégia  $\sigma$ , **mutantes**. Denotaremos esta nova população por  $X_\epsilon$ .

**exemplo:** População  $X$  com estratégias  $S = \{s_1, s_2\}$  e  $\sigma^* = \langle 1/2, 1/2 \rangle$  e mutantes com estratégia  $\sigma = \langle 3/4, 1/4 \rangle$

$$\begin{aligned} X_\epsilon &= (1 - \epsilon)\sigma^* + \epsilon\sigma = (1 - \epsilon)\langle 1/2, 1/2 \rangle + \epsilon\langle 3/4, 1/4 \rangle \\ &= \langle 1/2 - \epsilon/4, 1/2 + \epsilon/4 \rangle \end{aligned}$$

# Estratégias EEE

**Definição:** Uma estratégia  $\sigma^*$  é uma **Estratégia Evolucionariamente Estável EEE** se existe um  $\epsilon'$ , tal que, para todo  $\epsilon$ ,  $0 < \epsilon < \epsilon'$ , e para toda estratégia  $\sigma \neq \sigma^*$

$$\pi(\sigma^*, \mathbf{X}_\epsilon) > \pi(\sigma, \mathbf{X}_\epsilon)$$

- Uma EEE é robusta a ataque de mutações
- A população não cresce o suficiente mediante mutações
- Não compensa mutar

# Exemplo de EEE

- População: com  $\mu$  machos e  $1 - \mu$  fêmeas
- $\mathbf{X} = \langle \mu, 1 - \mu \rangle$
- Fêmeas acasalam uma vez e geram  $n$  crias
- Machos acasalam, em média,  $(1 - \mu)/\mu$  vezes
- O sexo das crias é determinado somente pelas fêmeas
- Estratégias  $\sigma = \langle p, 1 - p \rangle$ :
  - $s_1$  gerar crias machos com probabilidade  $p$
  - $s_2$  gerar crias fêmeas com probabilidade  $1 - p$

# Exemplo de EEE Cont 1

- Como recompensa para filhos é  $n$ , vamos trabalhar com netos
- Recompensa é dada pelo número de acasalamientos
- $\pi(s_1, \mathbf{X}) = n \times (n \times \frac{1-\mu}{\mu}) = n^2 \times \frac{1-\mu}{\mu}$
- São  $n$  filhos machos que podem acasalar com  $(n \times \frac{1-\mu}{\mu})$  fêmeas
- $\pi(s_2, \mathbf{X}) = n^2$
- Fêmeas só acasalam uma vez

# Exemplo de EEE Cont 2

- Recompensa de  $\sigma = \langle p, 1 - p \rangle$  é

$$\pi(\sigma, \mathbf{X}) = n^2 \times \left( \frac{1 - \mu}{\mu} \right) \times p + n^2 \times (1 - p)$$

- Como estamos interessados somente na proporção de machos e fêmeas  $\implies n = 1$
- Curso John Liu “Population Games”  
Transp.: 21,22,23/54

# Exemplos de EEE

- Curso John Liu “Population Games”
  1. Linux × Windows  
Transp.: 24,25,26/54
  2. Hawk-Dove Game  
Transp.: 27,28,29,30,31,32/54
  3. The evolution of money Game  
Transp.: 33,34,35,36,37,38/54
- Dividir a turma em grupos
  - ler e entender
  - apresentar
- Fazer Exercício transp. 39/54