Teoria dos Grafos - COS 242
2012/2

Terceira Lista de Exercícios

ATENÇÃO! Para ajudar no treinamento para as provas faça as listas de forma que todas as respostas estejam devidamente comentadas.

Questão 1: Considere a lista de funções abaixo. Ordene a lista pela ordem de crescimento das funções. Ou seja, se uma função $f(n)$ antecede qualquer outra função $g(n)$ na lista ordenada, então temos que $f(n) = O(g(n))$.

- $f_1(n) = n^{2.5}$
- $f_2(n) = \sqrt{2n}$
- $f_3(n) = 10^5 n + 10$
- $f_4(n) = n \log_2 n$
- $f_5(n) = n^{\sqrt{n}}$
- $f_6(n) = 2^{n^2}$
- $f_7(n) = n^{\log n}$
- $f_8(n) = 2^{2^n}$

Questão 2: Demonstre as propriedades de transitividade das classes de funções definidas por O e Ω. Ou seja, considerando três funções positivas, $f(n)$, $g(n)$ e $h(n)$, mostre que se $f = O(g)$ e $g = O(h)$ então $f = O(h)$. Mostre o mesmo para Ω. Dica: aplique a definição.

Questão 3: Mostre que se $r > s > 1$, então nunca é o caso de $r^n = \Theta(s^n)$. Ou seja, as funções exponenciais são todas diferentes com relação ao seu crescimento assintótico.

Questão 4: Considere o tempo de execução dos seis diferentes algoritmos abaixo. Assuma que estes são os exatos número de operações que o algoritmo precisa executar em função do tamanho da entrada, n. Assuma ainda que você possui um computador capaz de executar 10^{10} operações por segundo (exemplo de processadores modernos, com *clock* de GHz). Assuma que voce precisa obter o resultado em no máximo uma hora. Para cada um dos algoritmos abaixo, determine o maior tamanho do problema (ou seja, valor de n) para o qual o algoritmo termina dentro da limitação de tempo.

- n^2
- n^3
- $100n^2$
- $n \log n$

- 1.5^n
- $n!$
- 2^{2^n}

Questão 5: Descreva um algoritmo eficiente (em pseudo-código) para encontrar uma ordenação topológica em um DAG $G = (V, E)$. O algoritmo deve imprimir a ordenação dos vértices ao terminar. Além disso, o tempo de execução do algoritmo deve ser $O(m + n)$, onde n é o número de vértices e m é o número de arestas de G.

Questão 6: Modifique o algoritmo de Dijkstra apresentado em aula de modo a encontrar não somente a distância do vértice inicial a todos os outros, mas também o caminho mínimo. Escreva o pseudo-código do algoritmo. Seu algoritmo deve imprimir os caminhos mínimos do vértice inicial a todos os outros vértices do grafo.

Questão 7: Considere o grafo ilustrado na figura abaixo. Utilizando uma tabela (conforme apresentado em aula), mostre o funcionamento do algoritmo de Dijkstra passo-a-passo. Utilize o vértice A como ponto de partida.

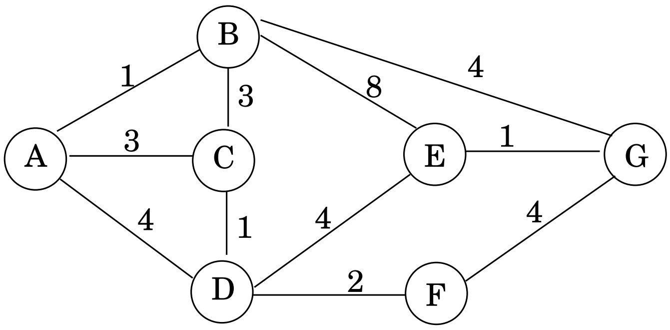

Figura 1: Um grafo não-direcionado com pesos.

Questão 8: O algoritmo de Dijkstra assume que os pesos associados às arestas são sempre positivos. Esta premissa foi necessária para provar a corretude do algoritmo, como vimos em aula. Dê um exemplo de um grafo direcionado com pesos negativos para o qual o algoritmo de Dijkstra produz resultados errados. Por que a prova da corretude do algoritmo não funciona quando temos pesos negativos?