Teoria dos Grafos - COS242
2012/2

Quarta Lista de Exercícios

ATENÇÃO! Para ajudar no treinamento para as provas faça as listas de forma que todas as respostas estejam devidamente comentadas.

Questão 1: Problema dos bares. Seja $G = (V, E)$ um grafo não-direcionado onde cada vértice $v \in V$ corresponde um determinado local em uma cidade. Cada aresta $e \in E$ possui um peso $w(e)$ que denota a distância (em Kilometros, por exemplo) entre os locais incidentes à aresta. Além disso, um subconjunto dos locais representados pelos vértices são especiais, pois correspondem a bares, ou seja $b \in B \subset V$ é um bar. Você gostaria de saber a distância para se chegar ao bar mais próximo a partir de qualquer local da cidade. Desenvolva um algoritmo eficiente para resolver este problema. Dica: execute Dijkstra apenas uma vez!

Questão 2: Considere o grafo ilustrado abaixo. Utilizando uma tabela (conforme apresentado em aula), mostre o funcionamento do algoritmo de Prim passo-a-passo. Utilize o vértice D como ponto de partida.

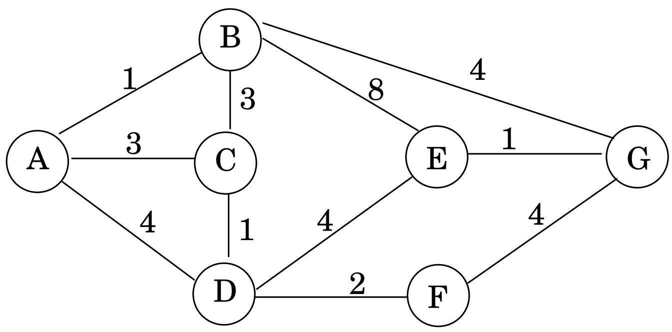

Figura 1: Um grafo não-direcionado com pesos.

Questão 3: Utilize a Propriedade do Corte das árvores geradoras mínimas para provar que o algorimto de Kruskal está correto, ou seja, que ao final de sua execução ele produz uma árvore geradora mínima.

Questão 4: A essência do algoritmo de Kruskal, que encontra a árvore geradora mínima, é iniciar o processo guloso com um grafo sem arestas e ir adicionando arestas ao grafo em ordem crescente de peso, garantindo a cada passo que ciclos não se formem. Uma outra idéia é iniciar o processo guloso com o grafo original e ir removendo arestas em ordem decrescente de peso (mais pesada primeiro, etc). O que precisa ser garantido a cada passo do algoritmo? Descreva, em pseudo-código, um algoritmo baseado nesta idéia.

Questão 5: Considere o problema da MST (obter a árvore geradora de custo mínimo) em um grafo não direcionado $G = (V, E)$ onde cada aresta $e \in E$ possui um custo $c_e \geq 0$ e que tais custos não são necessariamente diferentes. Em geral, quando os custos não são todos distintos, o grafo G pode possuir várias árvores geradoras de custo mínimo. Suponha que você conheça uma árvore geradora $T \subset E$ com a garantia de que para cada aresta $e \in T$, e pertence a *alguma* árvore geradora de custo mínimo de G. Podemos concluir que T é uma árvore geradora de custo mínimo de G? Prove este resultado ou dê um contra-exemplo.

Questão 6: Considere o problema do caminho de custo mínimo em um grafo G direcionado. Assuma que todos os pesos das arestas de G são positivos e distintos. Seja P um caminho de custo mínimo entre os vértices s e t de G. Agora suponha que todos os pesos c_e das arestas de G sejam trocados pelo quadrado do seu valor, ou seja, por c_e^2, dando origem a uma nova instância do problema no mesmo grafo, mas com pesos diferentes. Determine se o caminho P irá continuar a ser um caminho de custo mínimo entre s e t nesta nova instância. Caso negativo, dê um contra-exemplo.