Teoria dos Grafos – COS242
2012/2

Oitava Lista de Exercícios

ATENÇÃO! Para ajudar no treinamento para as provas faça as listas de forma que todas as respostas estejam devidamente comentadas.

Questão 1: Considere a rede de fluxos ilustrada abaixo, com capacidades e fluxos indicados em cada aresta. Determine:

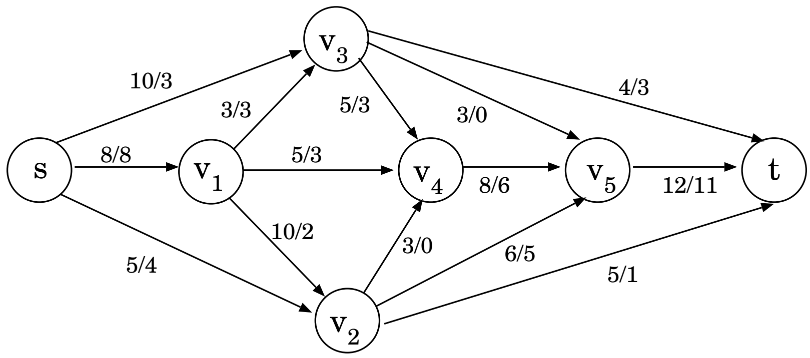

Figura 1: Uma rede de fluxos $s-t$; pesos nas arestas indicam capacidade/fluxo.

- Qual é o valor deste fluxo?
- O fluxo ilustrado é fluxo máximo?
- Determine o corte s-t mínimo da rede de fluxo e sua capacidade.

Questão 2: Decida se a afirmação abaixo é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira, dê uma breve explicação. Se for falsa, dê um contra-exemplo.

- Seja $G = (V, E)$ uma rede de fluxos qualquer com vértice de origem s e destino t, e capacidades c_e inteiras e positivas associadas a cada aresta $e \in E$, e seja (A, B) um corte $s-t$ mínimo desta rede de fluxos. Suponha agora que adicionamos uma unidade às capacidades de todas as arestas da rede. Temos então que o corte (A, B) continua a ser um corte $s-t$ mínimo desta nova rede de fluxos, cujas capacidades foram aumentadas em uma unidade.

Questão 3: Considere o algoritmo original de Ford-Fulkerson para resolver o problema do fluxo máximo. Considere a rede de fluxo abaixo.

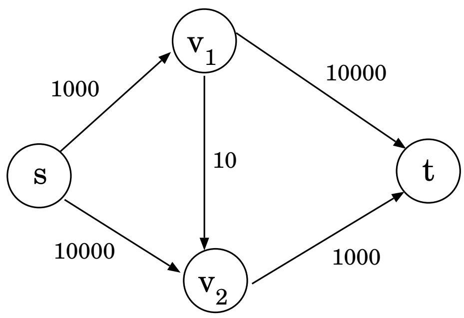

Figura 2: Uma rede de fluxos patológica (pesos nas arestas indicam capacidade).

- Mostre como uma execução do algortimo pode levar muito tempo para convergir. Determine a operação do algoritmo passo-a-passo, assim como o grafo residual. Quantos passos serão necessários no pior caso?
- Considere a melhoria do algoritmo discutida em aula (que considera caminhos com capacidade de no mínimo Δ, para diferentes valores de Δ). Determine a operação do algoritmo passo-a-passo, assim como o grafo residual. Quantos passos serão necessários no pior caso?

Questão 4: Considere um conjunto $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ de professores e um conjunto $D = \{d_1, \ldots, d_m\}$ de disciplinas e um conjunto I que representa o interesse dos professores em oferecer as disciplinas. Desta forma, o par ordernado $(p, d) \in I$ indica que o professor $p \in P$ tem interesse em oferecer a disciplina $d \in D$. Dados os três conjuntos, o problema é determinar o maior número de disciplinas que podem ser oferecidas simultaneamente pelo conjunto de professores, segundo seus interesses declarados. Modele o problema usando grafos e considere os seguintes casos.

- Assuma que não há um limite superior para o número de disciplinas que um professor pode oferecer. Determine um algoritmo eficiente para o problema (dica: transforme o problema).
- Assuma que cada professor deve oferecer no máximo uma disciplina. Determine um algoritmo eficiente para o problema (dica: transforme o problema).

Questão 5: Duas pessoas jogam um jogo num grafo G selecionando vértices distintos $v_0, v_1, v_2, \ldots$ tal que, para $i > 0$, v_i é adjacente a v_{i-1}. O último jogador que conseguir selecionar um vértice ganha. Mostre que o primeiro jogador tem uma estratégia vencedora se e somente se G não tem um emparelhamento perfeito.

Questão 6: Queremos construir, caso exista, um grafo direcionado simples, não necessariamente conexo, com n vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$ onde cada vértice v_i tem um grau externo especificado $d^+(v_i)$ e um grau interno especificado $d^-(v_i)$. Mostre que a seguinte construção resolve este problema.

Construa uma rede N com $V = \{X, Y, a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ e arestas E contendo Xa_i, para todo i; b_iY, para todo i; e a_ib_j, para todo $i \neq j$. As capacidades são: $Xa_i = d^+(v_i)$, $b_iY = d^-(v_i)$, $a_ib_j = 1$.

Maximize o fluxo de X para Y. Se um fluxo máximo satura todas as arestas a partir de X e todas as arestas que chegam em Y, então o grafo direcionado satisfazendo as propriedades sobre os graus existe. Este grafo direcionado é obtido da rede N removendo X e Y, e identificando vértices a_i e b_i.

Questão 7: Problema da Excursão: R famílias partem numa excursão em S veículos. Existem f_i pessoas na família i, e v_j lugares no veículo j. Será possível organizar os veículos de modo que duas pessoas da mesma família não estão num mesmo veículo? Dica: rede de fluxo!