Teoria dos Grafos
Aula 2

Aula passada

- Logística
- Objetivos
- Grafos, o que são?
- Formando pares

Aula de hoje

- Mais problemas reais
- Definições importantes
- Algumas propriedades

Objetivos da Disciplina

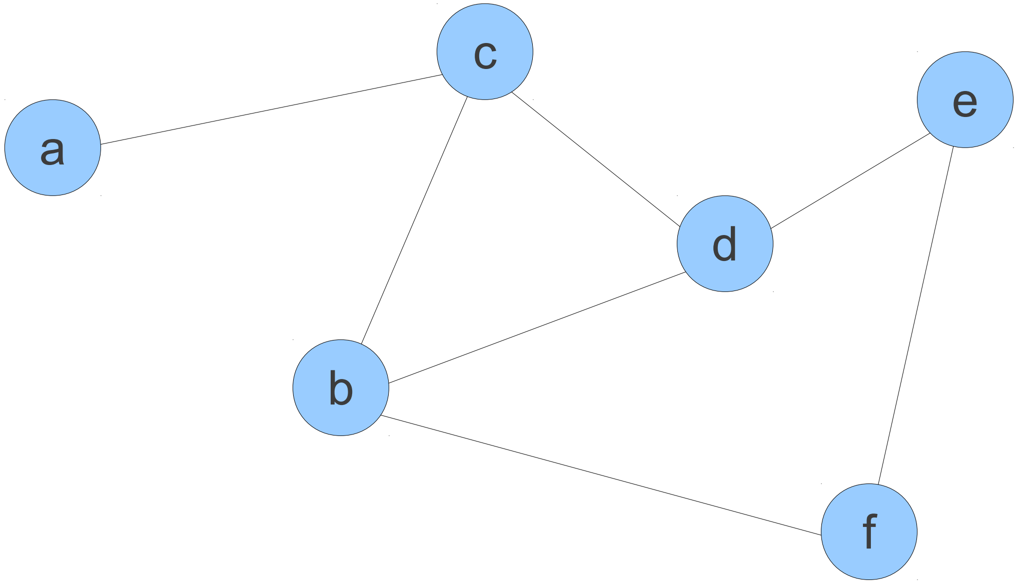
- Grafos como ferramenta de modelagem
  - abtração de problemas reais
- Algoritmos eficientes em grafos para resolver problemas

Abordagem?

- Estudo de problemas reais
- Construção de algoritmos eficientes
  - complexidade de algoritmos
- Técnicas para construção de algortimos

O que é um grafo?

- Definição: “Um grafo é um conjunto de pontos, chamados vértices, conectados por linhas, chamadas de arestas” [Wikipedia 2008]



É um grafo?

Definição burocrática!

Grafo, outra definição

- Abstração que permite codificar relacionamentos entre pares de objetos

Que objetos?

- Qualquer um! Ex. pessoas, cidades, empresas, países, páginas web, filmes, etc...

Que relacionamentos?

- Qualquer um! Ex. amizade, conectividade, produção, língua falada, etc.
- Simétrico ou assimétrico

Grafo

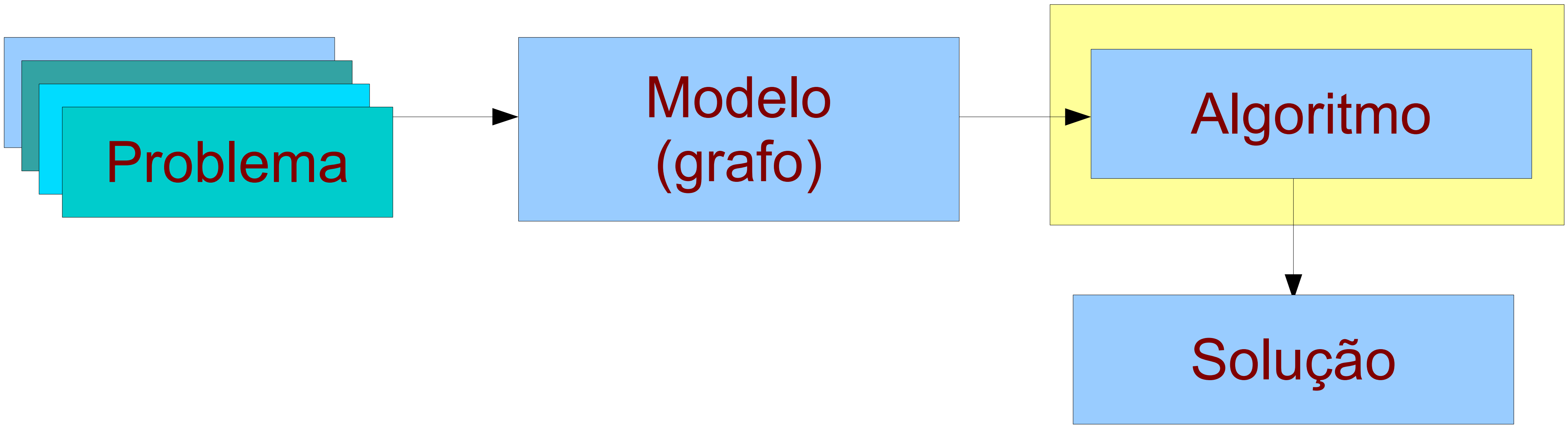
- Abstração que permite codificar relacionamentos entre **pares** de objetos

objetos → vértices do grafo

relacionamentos → arestas do grafo

Exemplos?

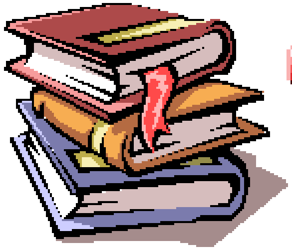
Poder da Abstração



- Muitos problemas resolvidos com o mesmo **algoritmo** (solução) em cima da abstração!

Alocação de Professores

- N professores



- M disciplinas (< N)

- Cada professor pode lecionar uma ou mais disciplinas

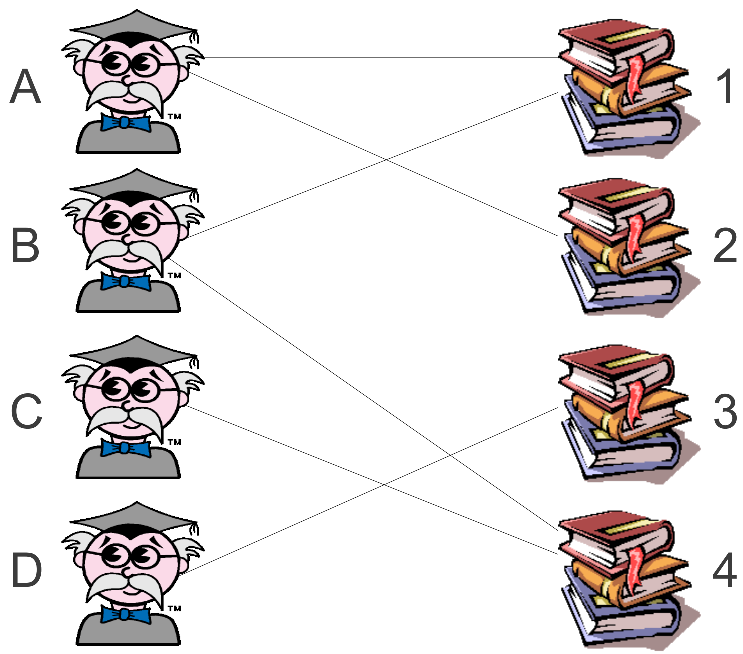
- **Problema 1:** Dado o que cada professor pode lecionar, é possível que as **M** disciplinas sejam oferecidas simultaneamente?

- **Problema 2:** Qual o maior número de disciplinas que podem ser oferecidas?

Alocação de Professores

- Como abstrair o problema (via grafos)?

Mesma abstração!



Mesmo algoritmo!

Pesquisando no Orkut

- Milhões de pessoas (profiles)
- Profiles interligadas via relacionamentos declarados

- **Problema 1:** Como saber se duas pessoas estão “conectadas” através de uma sequência de relacionamentos?

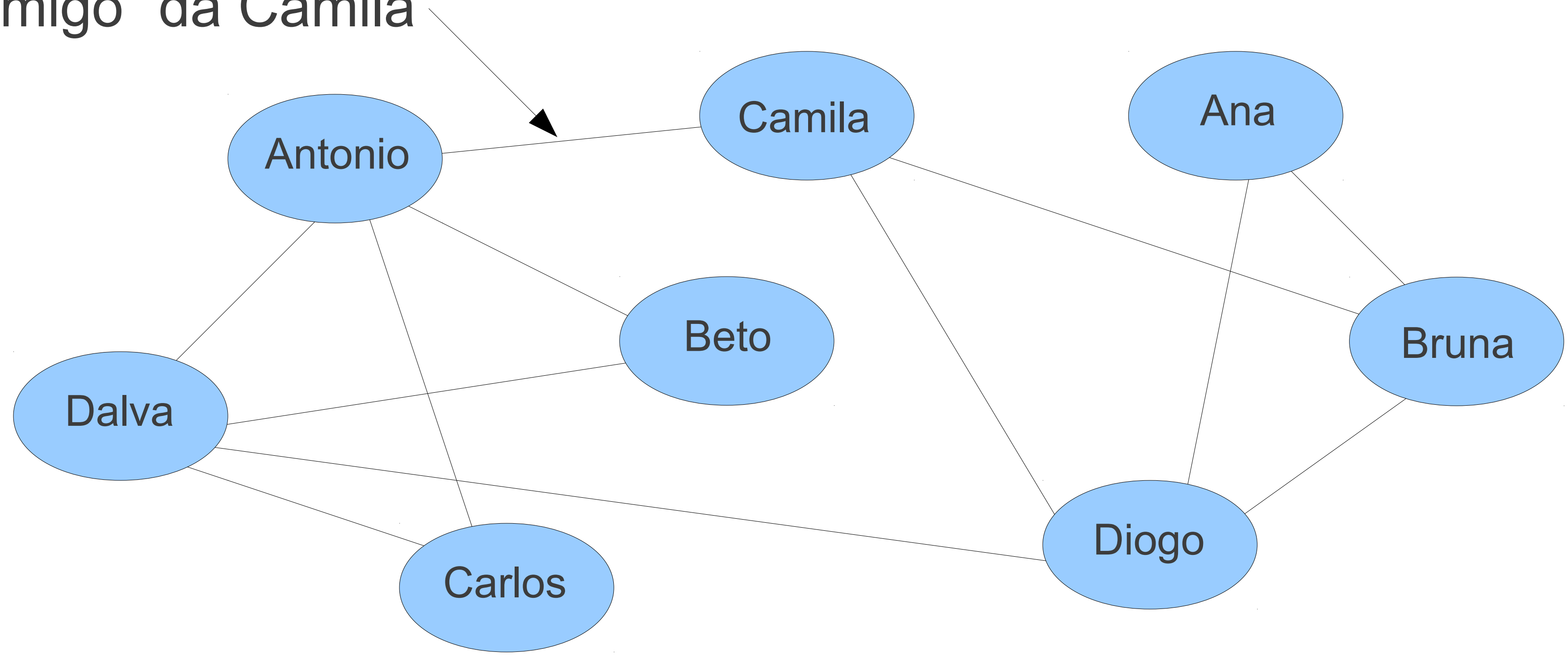
- **Problema 2:** Qual é o menor caminho entre duas pessoas?

Orkut resolve os dois problemas!

Pesquisando no orkut beta

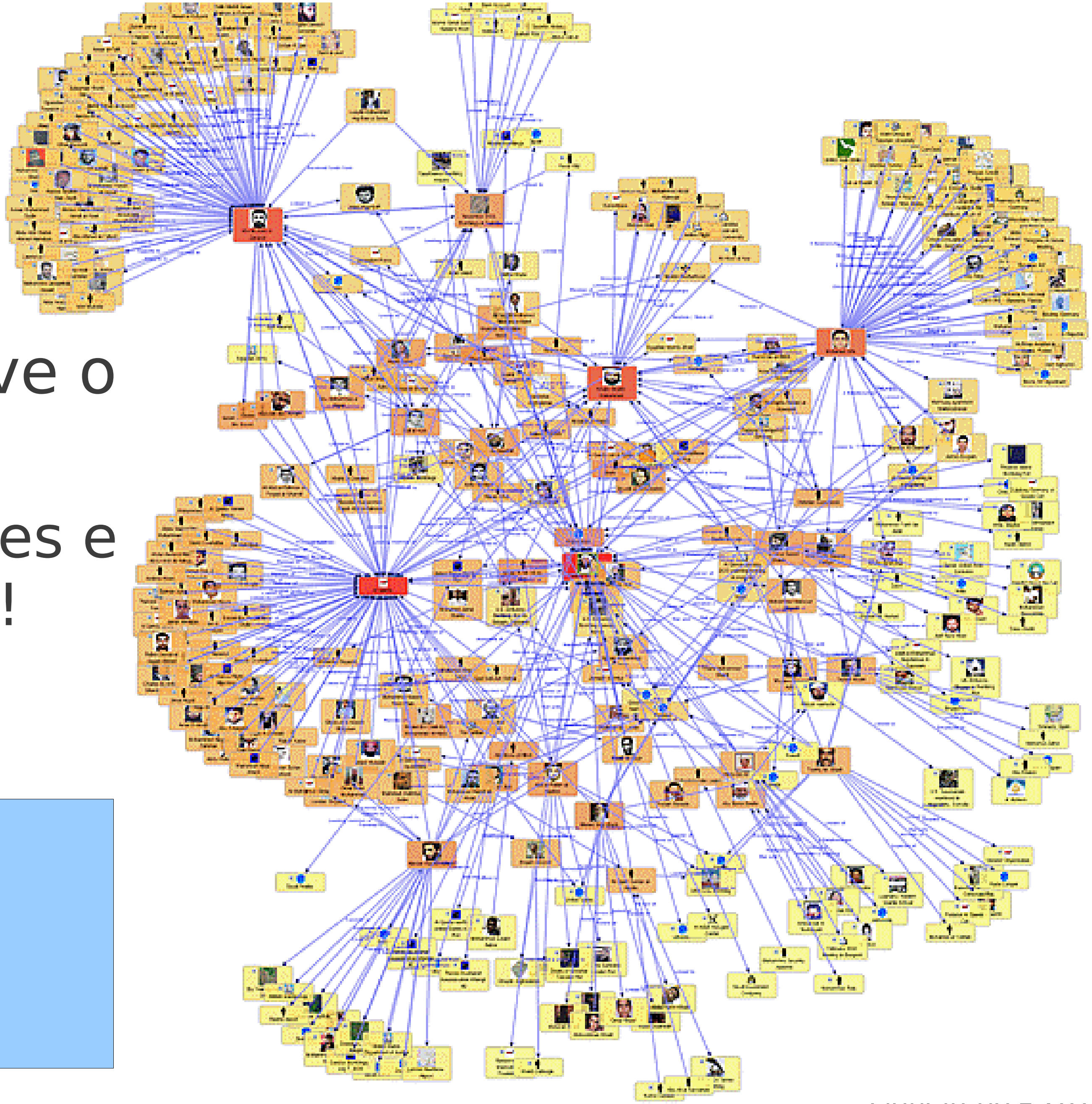
- Como abstrair o problema (via grafos)?
- Objeto: profiles (pessoas)
- Relacionamento: relacionamentos declarados

Antonio é
“amigo” da Camila



- Carlos e Ana: Conectados? Menor caminho?

Pesquisando no orkut



- Como Orkut resolve o problema?
  - milhões de profiles e relacionamentos!

Algoritmo (eficiente)!

Viagem entre Cidades

- Cidades brasileiras
- Estradas entre cidades

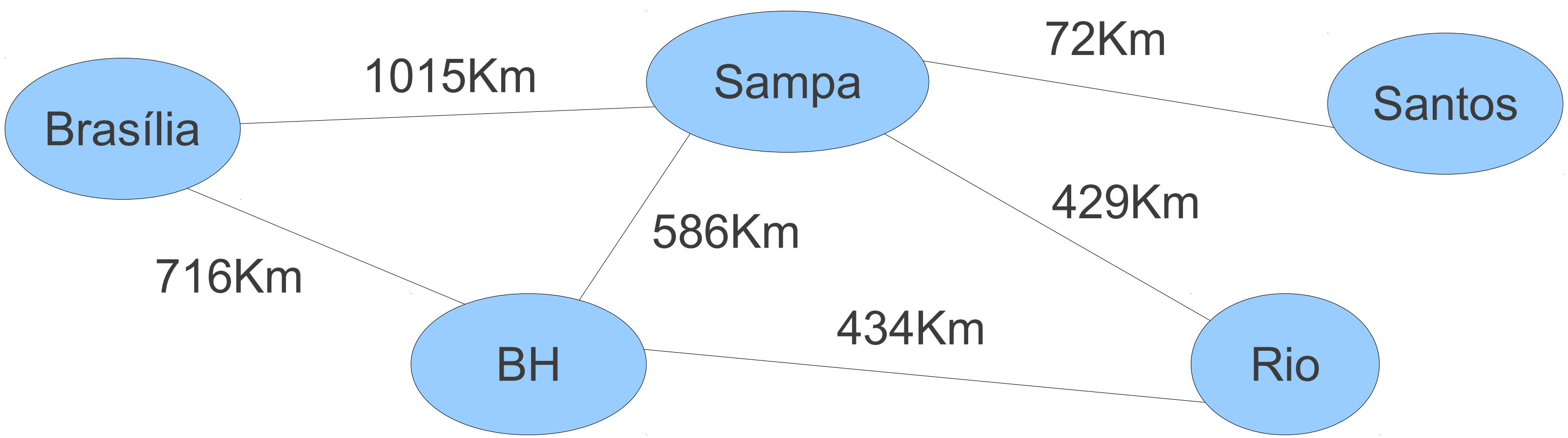
- **Problema 1:** Como saber se duas cidades estão "conectadas" por estradas?

- **Problema 2:** Qual é o menor (melhor) caminho entre duas cidades?

Viagem entre Cidades

- Como abstrair o problema (via grafos)?

Abstração parecida!



Algoritmo parecido!
(algumas variações)

Grafo

- Abstração que permite codificar relacionamentos entre pares de objetos

Como representá-lo formalmente?

Conjuntos!

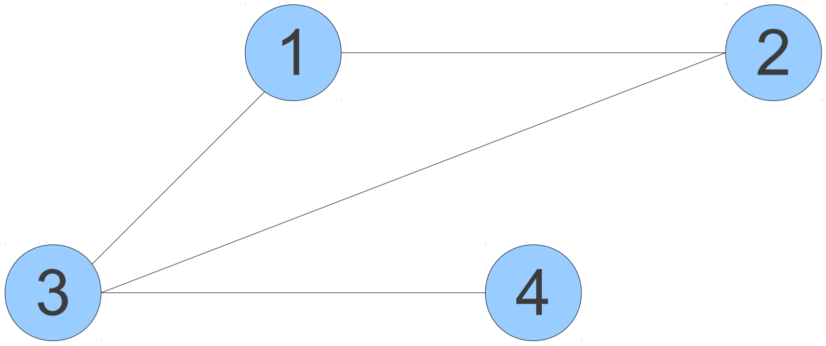
- Conjuntos de objetos e de pares relacionados

Grafo

- Grafo G = (V, E)
- V = conjunto de objetos
  - chamaremos de vértices ou nós
- E = conjunto de pares relacionados
  - chamaremos de arestas
  - par não ordenado: (a,b) == (b,a)
- Exemplo: G = (V, E)
  - V = {1, 2, 3, 4}
  - E = {(1,2), (1,3), (2,3), (3,4)}

Representação Gráfica

- Desenho de G (o que vimos até agora)
  - representação gráfica dos conjuntos
- Exemplo: G = (V, E)
  - V = {1, 2, 3, 4}
  - E = {(1,2), (1,3), (2,3), (3,4)}



Adjacência e Incidência

- Vértices adjacentes são vértices “vizinhos”
  - mais precisamente...
- Dado grafo G= (V, E)
- Dois vértices *a* e *b* são **adjacentes** se existe *e* = (*a*, *b*) no conjunto E
- Aresta *e* é **incidente** aos vértices *a* e *b*
- Exemplo: G = (V, E)
  - V = {1, 2, 3, 4}
  - E = {(1,2), (1,3), (2,3), (3,4)}
  - 4 e 1 são adjacentes?
  - 3 e 2 são adjacentes?

Vértices e Arestas

- Número de vértices de um grafo
  - n = |V|

cardinalidade
do conjunto

- Número de arestas de um grafo
  - m = |E|
- Dado G = (V, E)
  - Menor número de arestas de G? → **zero!**
  - Maior número de arestas de G?

- número de pares não ordenados em um conjunto de n = |V| objetos

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \leq n^2$$

Grau

- Grau de um vértice *v*
  - número de vértices adjacentes a *v*
  - função grau(*v*)

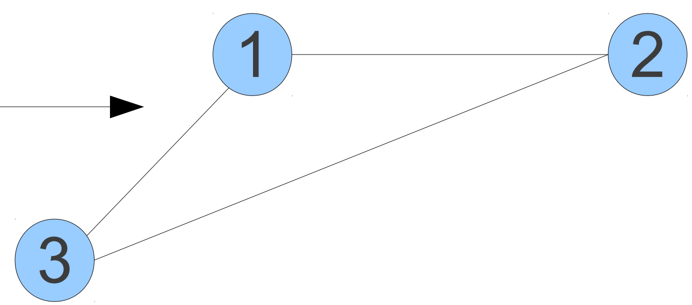
- Exemplo: G = (V, E)
  - V = {1, 2, 3, 4}
  - E = {(1,2), (1,3), (2,3), (3,4)}
  - grau(1) = ?
  - grau(4) = ?

- Dado G = (V, E)
  - Grau mínimo de um vértice? → **zero!**
  - Grau máximo de um vértice? → ***n - 1***

Grafo Regular

- Todos os vértices têm mesmo grau
  - no caso de *r*-Regular, grau é *r*

- Exemplo: G é 2-regular, n = 3
  - V = {1, 2, 3}
  - E = {(1,2), (1,3), (2,3)}



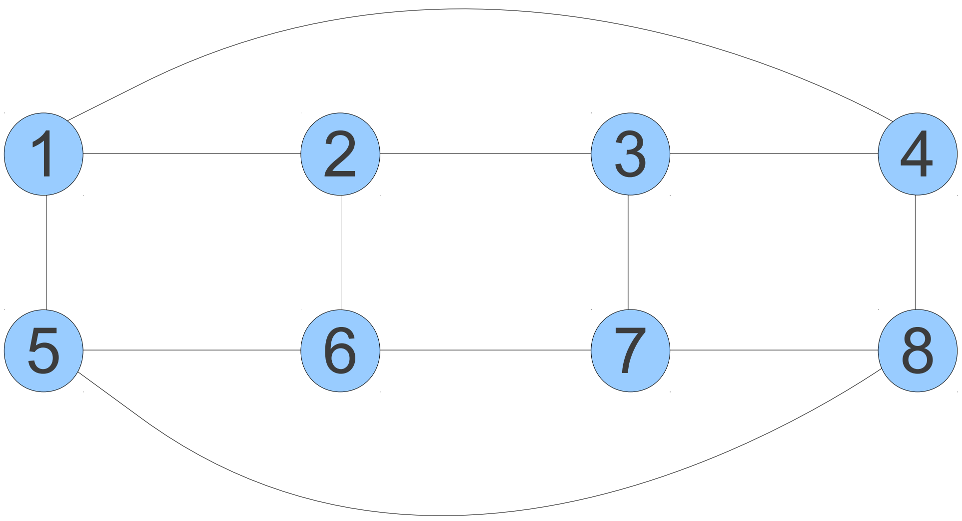
- Dado G = (V, E), e G r-regular
- Quantas arestas tem G?

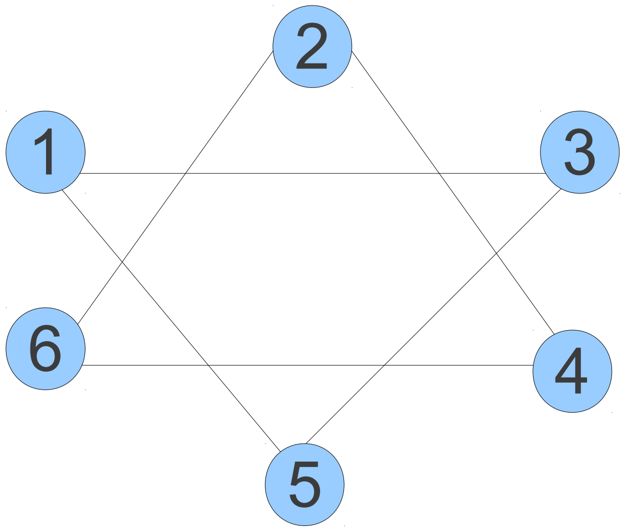
$$|E| = \frac{nr}{2}$$

Por que?

Grafo Regular

- São regulares?

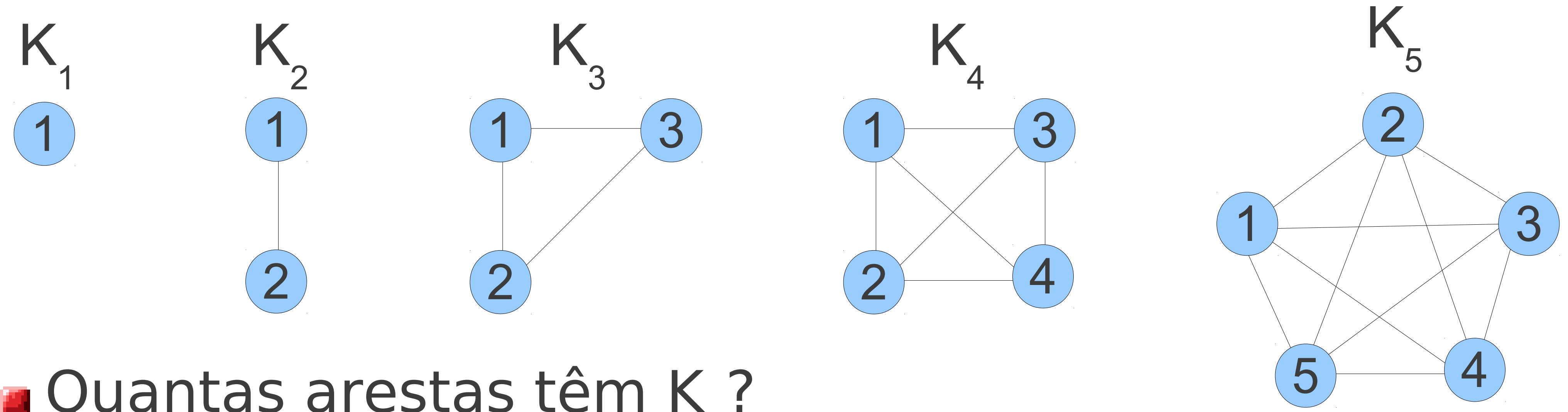




- É possível ter qualquer combinação de n e r?

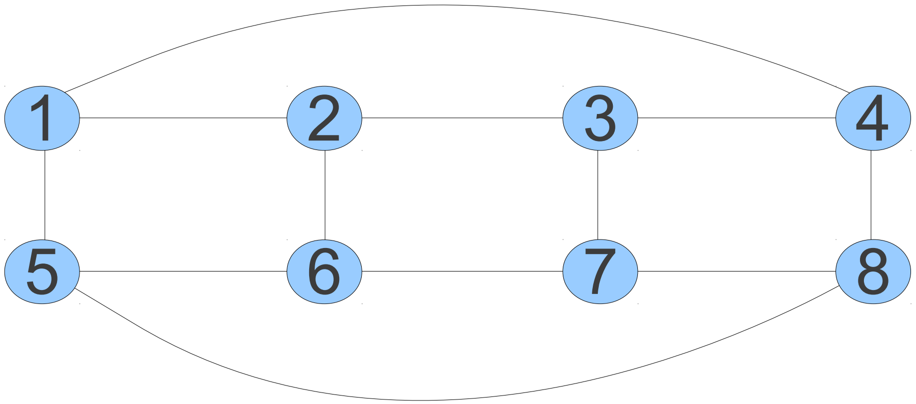
Grafo Completo

- Aresta presente entre cada par de vértices
  - todos os vértices tem grau máximo
- Notação de grafo completo
  - K_n onde *n* é o número de vértices
- Exemplos



- Quantas arestas têm K_n?

Caminho



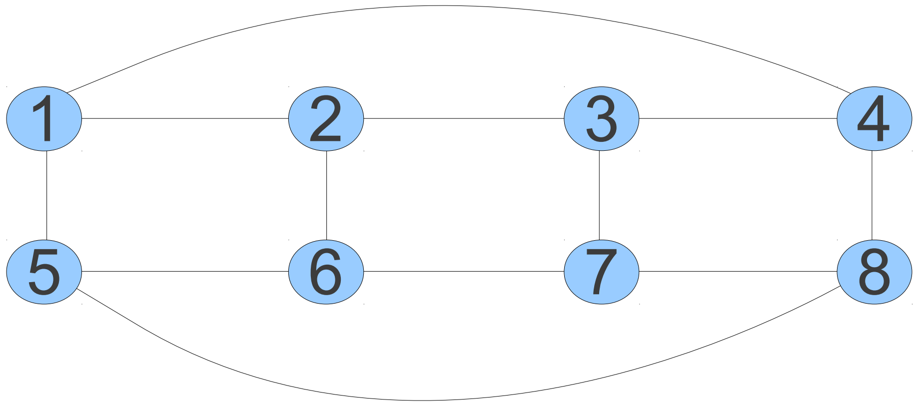
- Como definir “caminho” em um grafo?
- Ex. caminho entre 1 e 7?

- Caminho entre dois vértices
  - sequência de vértices conectados por arestas

- Caminho entre v_1 e v_k
  - sequência v_1, ..., v_k, tal que $(v_i, v_{i+1}) \in E \quad i = 1, \ldots k-1$

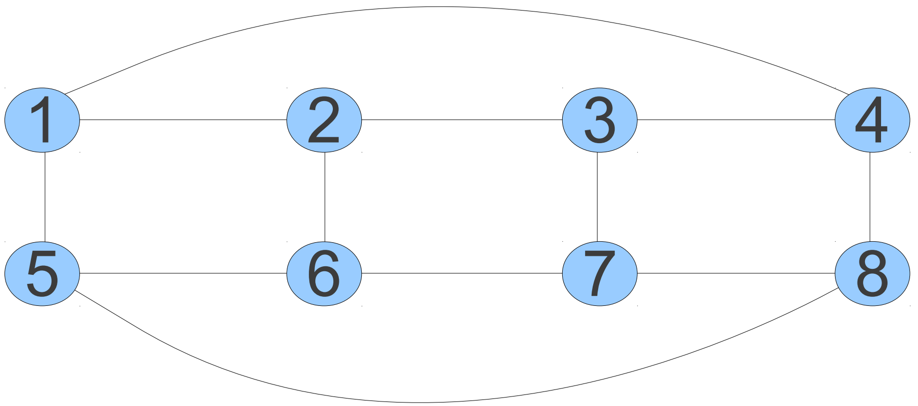
- Ex. caminho entre 1 e 7?
  - 1, 2, 3, 7 → (1,2), (2,3), (3,7)
  - 1, 5, 6, 2, 6, 7 é caminho?

Caminho Simples



- Vértices do caminho são distintos
  - não há “voltas”
- Ex. caminho entre 1 e 7?
  - 1, 5, 6, 2, 6, 7 ← não é caminho simples
  - 1, 5, 8, 7 ← é caminho simples
- Comprimento do caminho
  - número de arestas que o forma
- Dado G = (V, E)
  - qual é o menor caminho simples entre dois vértices?
  - qual é o maior?

Ciclo



- Caminho simples que começa e termina no mesmo vértice
  - $v_1 = v_k$
- Ex. ciclo em 5?
  - 5, 1, 2, 3, 7, 6, 5
  - 5, 1, 4, 8, 5
- Comprimento do ciclo
  - número de arestas que o forma
- Dado G = (V, E)
  - qual é o maior ciclo?
  - n vértices, ciclo hamiltoniano

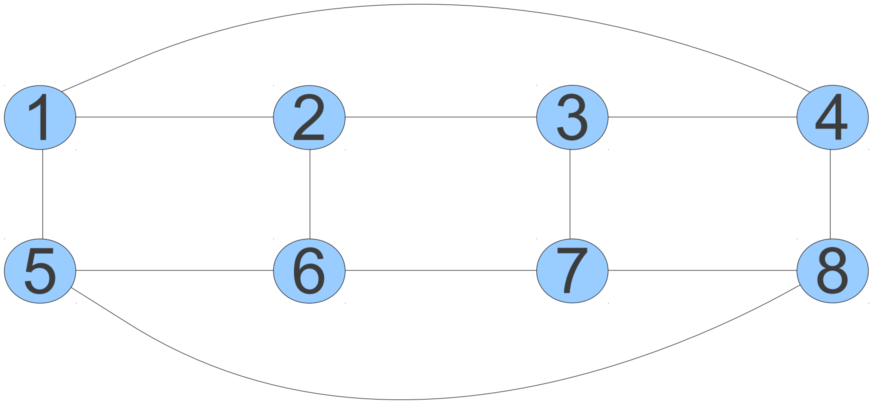
Subgrafo

- Um grafo que é “parte” de outro grafo
  - mais precisamente...

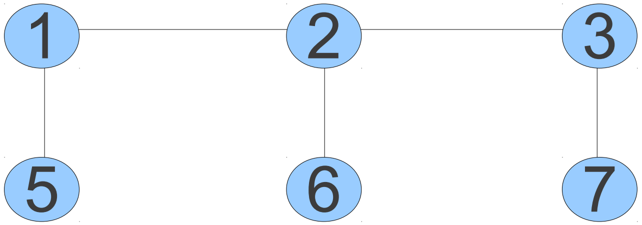
- Dado G = (V, E)
- G' = (V', E') é subgrafo de G se
  - $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$

Subgrafo Exemplo

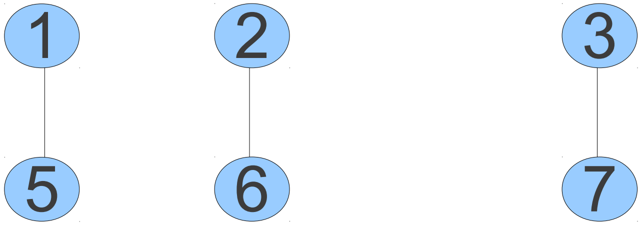
- Dado G = (V, E)



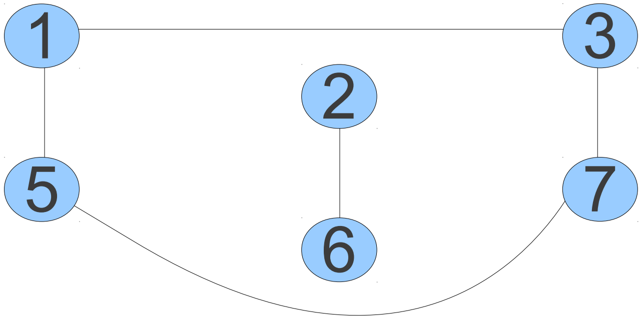
É subgrafo de G?



É subgrafo de G?



É subgrafo de G?



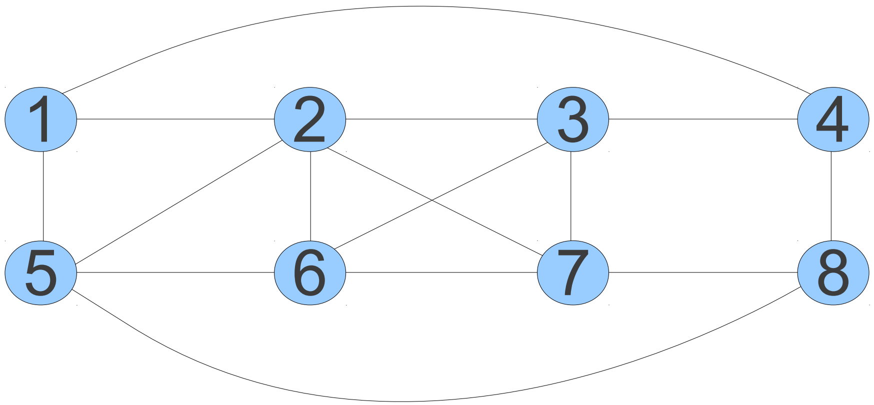
Clique

- Um grafo completo “dentro” de outro grafo
    - mais precisamente...

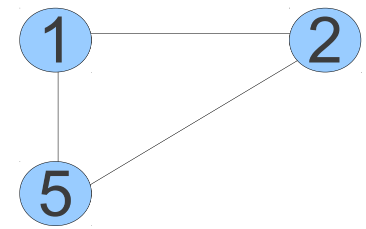
- Dado G = (V, E)
- G' = (V', E') é um *clique* de G se
    - G' é subgrafo de G
    - G' é um grafo completo

Clique Exemplo

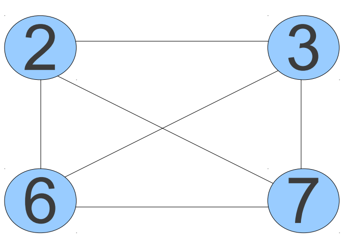
- Dado G = (V, E)



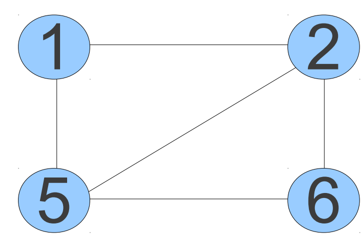
É clique de G?



- Qual é o maior clique de G?



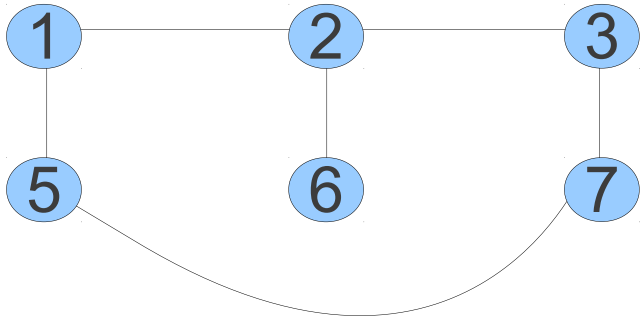
É clique de G?



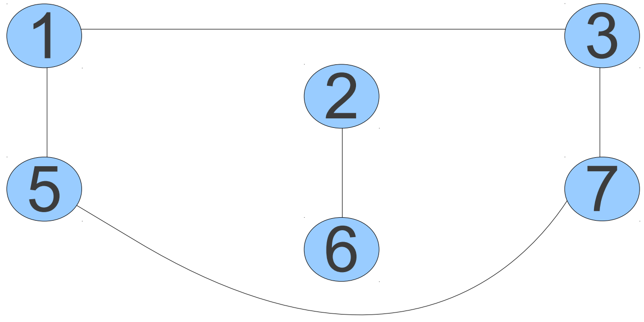
- Problema “difícil”: encontrar maior clique de um grafo

Conexo

- Grafo está “conectado”
  - como definir mair precisamente?
- Grafo G=(V, E) é conexo se
  - existe caminho entre qualquer par de vértices
- Caso contrário, G é desconexo



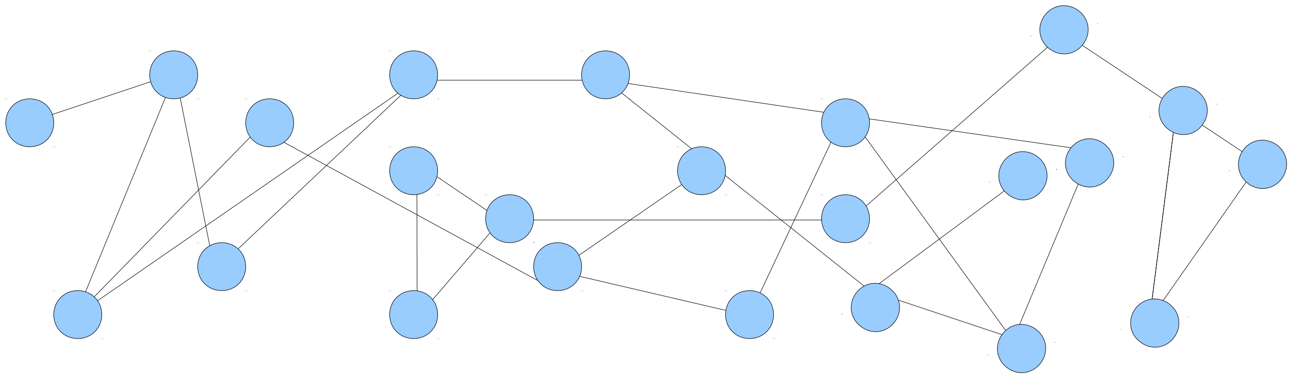
Conexo?



Conexo?

Conexo

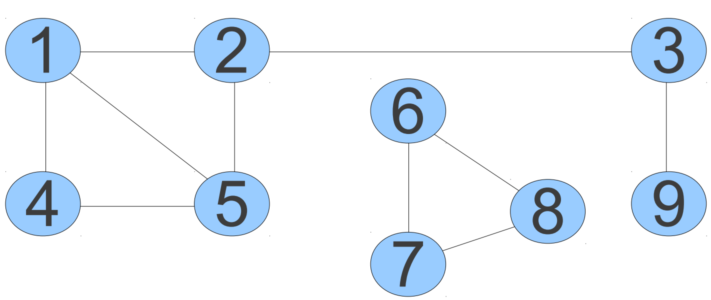
- **Problema**: Como saber se um grafo é conexo?

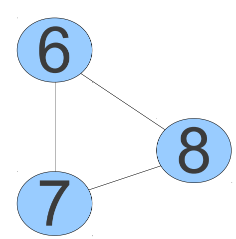


- Como você resolveria este problema?
- Veremos algoritmo (eficiente)
  - em duas aulas...

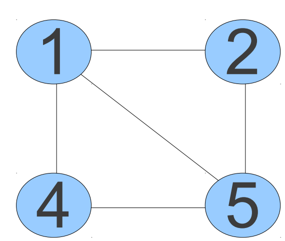
Componentes Conexos

- Maiores subgrafos “conectados” de um grafo
  - mais precisamente...
- Subgrafos maximais de G que sejam conexos
  - *maximal*: subconjunto que maximiza a propriedade, no caso subgrafo conexo
- Exemplo:





Componente conexo?



Componente conexo?