Teoria dos Grafos
Aula 5

Aula passada

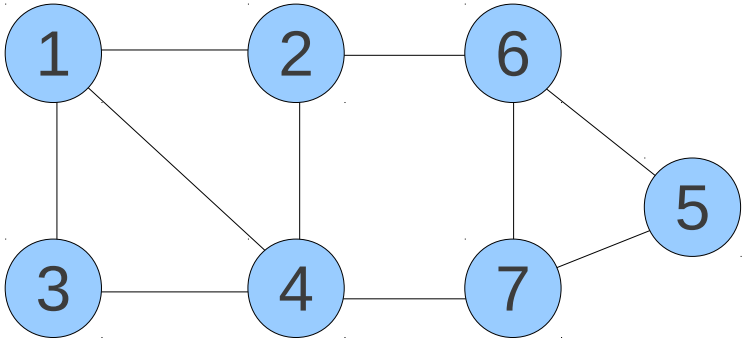
- Busca em grafos
- Busca em largura (BFS - Breadth-First Search)
- Propriedades

Aula de hoje

- BFS – implementação
- Complexidade
- Busca em profundidade (DFS)
- Conectividade, componentes

Busca em Largura (BFS)

- Explorar vértices descobertos mais antigos primeiro



- Origem: vértice 1
- Em que ordem os vértices são *descobertos*?

Assumir arestas são exploradas em ordem crescente dos vértices adjacentes (matriz ou lista de adjacência)

Implementação

- Como implementar a busca em largura?
- Algoritmo simples, sem camadas, somente para percorrer o grafo, utilizando **fila**

```
1.Desmarcar todos os vértices
2.Definir fila Q vazia
3.Marcar s e inserir s na fila Q
4.Enquanto Q não estiver vazia
5.    Retirar v de Q
6.    Para todo vizinho w de v faça
7.       Se w não estiver marcado
8.          marcar w
9.          inserir w em Q
```

s é o vértice raiz!

Complexidade

- Qual é a complexidade deste algoritmo?
  - utilizando lista de adjacência?

```
1.Desmarcar todos os vértices
2.Definir fila Q vazia
3.Marcar s e inserir s na fila Q
4.Enquanto Q não estiver vazia
5.      Retirar v de Q
6.      Para todo vizinho w de v faça
7.         Se w não estiver marcado
8.            marcar w
9.            inserir w em Q
```

percorre os n vértices

quantos vértices em Q?

Percorre vizinhos do vértice, para cada vértice

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m$$

Complexidade

- O(n + m)
- Complexidade linear
  - mesma ordem de grandeza do tempo necessário para ler o grafo!
- Se grafo for denso, $m \sim n^2$

Recordação

- O que é O(n + m)?
- Por que não O(n) ou O(m) ou $O(n^2)$?
- O(n + m) representa o **máximo** entre n e m! ← "+" = max

Conectividade

- **Problema**: Como saber se existe caminho entre dois vértices?
  - ex. ir do Rio à Xapuri de carro?

Usar BFS para resolver este problema!

- Como?
- Marca s como raiz
- Realiza BFS
- Ao terminar a BFS se t estiver marcado, então há caminho, caso contrário, não há

Grafo Conexo

- **Problema:** como determinar se um grafo G é conexo?

Aplicações?

- Transporte aéreo comercial
  - voar de qualquer cidade para qualquer cidade

Idéia: utilizar BFS!

- Escolher vértice *v* qualquer de G
- Executar BFS à partir de *v*
- Verificar se todos vértices foram marcados

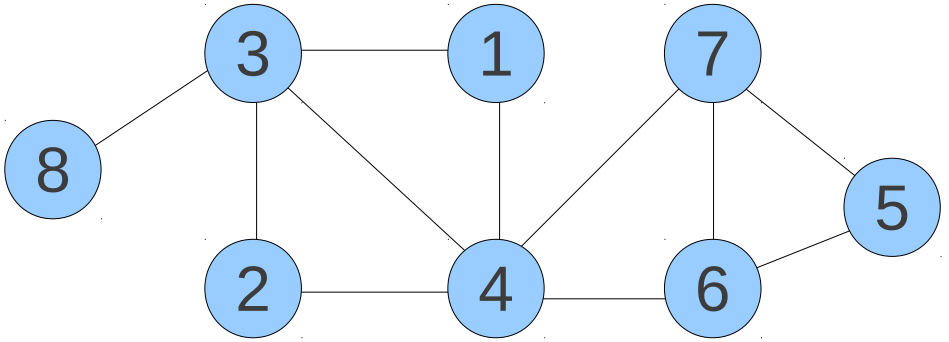
Busca em Profundidade (DFS)

- Explorar vértices descobertos mais recentes primeiro
- Oposto de BFS: explora mais antigo primeiro

- **Interpretação**
  - procurar uma saída de um labirinto
  - vai fundo atrás da saída (tomando decisões a cada encruzilhada)
  - volta a última encruzilhada quando encontrar um beco sem saída (ou lugar já visitado)

Busca em Profundidade

- Explorar o grafo abaixo usando DFS
  - início: vértice 4
  - vizinhos encontrados em ordem crescente

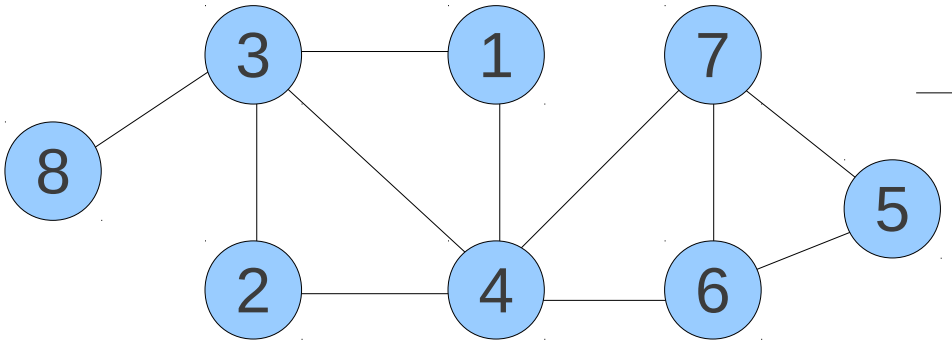


- Ordem de descobrimento dos vértices?

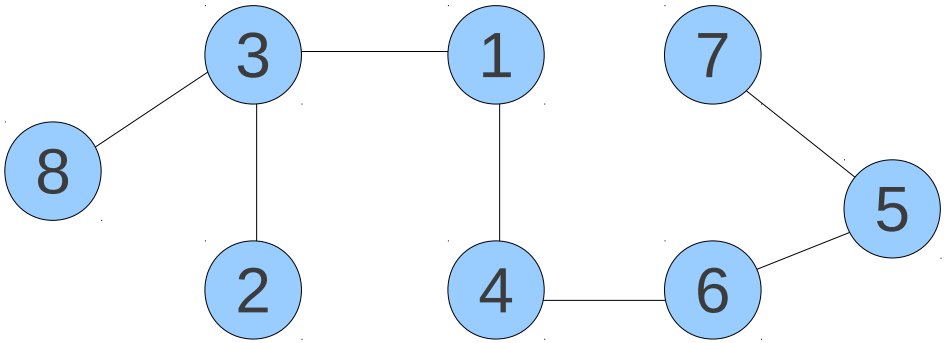
Árvore de Profundidade

- Árvore *induzida* pela busca em profundidade
  - Raiz: vértice de origem
  - Pai de v: nó que levou à descoberta de v

raiz: nó 4



Árvore de profundidade



- Ordem da busca *define* árvore

Implementação

- Como implementar DFS?
  - utilizando algoritmo recursivo

```
1.DFS(u)
2.  Marcar u como descoberto
3.  Para cada aresta (u,v) incidente a u
4.    Se v não estiver marcado
5.      DFS(v)  // chamada recursiva
6.
7.Desmarcar todos os vértices
8.Escolher vértice inicial s
9.DFS(s)
```

Implementação

- Como implementar DFS?
  - utilizando uma pilha

```
1.DFS(s)
2.Desmarcar todos os vértices
3.Definir pilha P com um elemento s
4.  Enquanto P não estiver vazia
5.    Remover u de P // no topo da pilha
6.    Se u não estiver marcado
7.      Marcar u como descoberto
8.      Para cada aresta (u,v) incidente a u
9.        Adicionar v em P // no topo
```

Complexidade

- Qual é a complexidade deste algoritmo?

```
1.Desmarcar todos os vértices
2.Definir pilha P com um elemento s
3.  Enquanto P não estiver vazia
4.     Remover u de P // no topo da pilha
5.     Se u não estiver marcado
6.        Marcar u como descoberto
7.        Para cada aresta (u,v) incidente a u
8.           Adicionar v em P // no topo
```

- Custo para desmarcar vértices?
- Quantos vértices adicionados em P?
  - vértice adicionado em P mais de uma vez?
- Quantas vezes uma aresta é examinada?

Complexidade

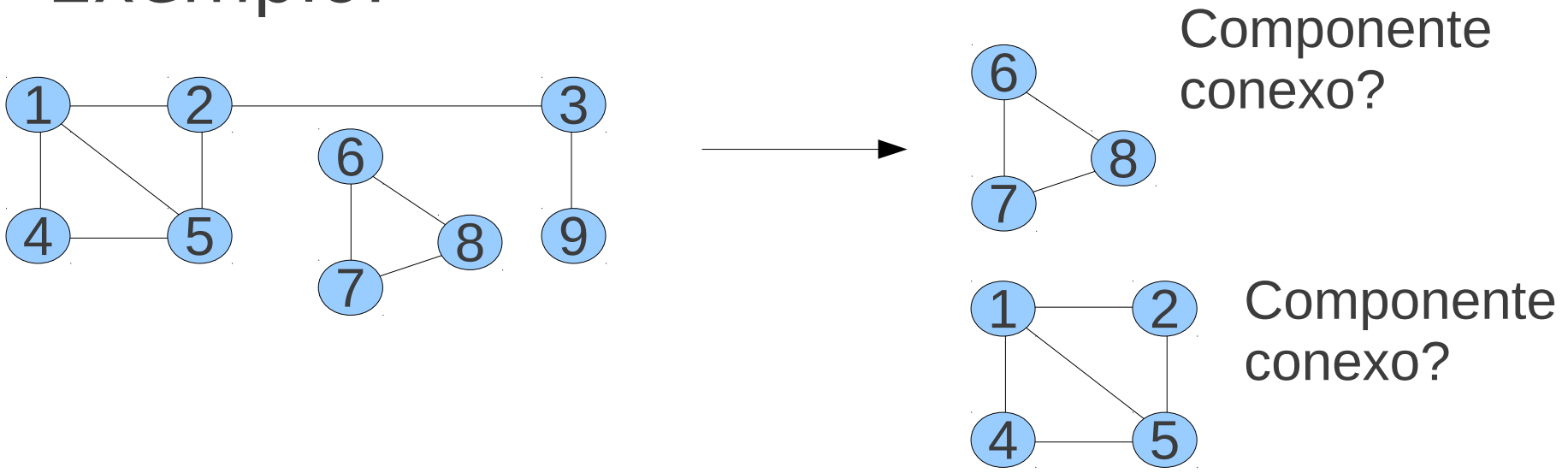
- O(n + m)
- Complexidade linear
  - mesma ordem de grandeza do tempo necessário para ler o grafo!
- Se grafo for denso, $m \sim n^2$
- Mesma complexidade que BFS!

Árvore de Profundidade

- Como obter árvore geradora induzida pela busca?
- Como modificar algoritmo para gerar a árvore?
- **Idéia**
  - Utilizar vetor pai[] para indicar o pai de um vértice *v* na árvore
  - Idéia independe do tipo de busca (BFS, DFS, etc)

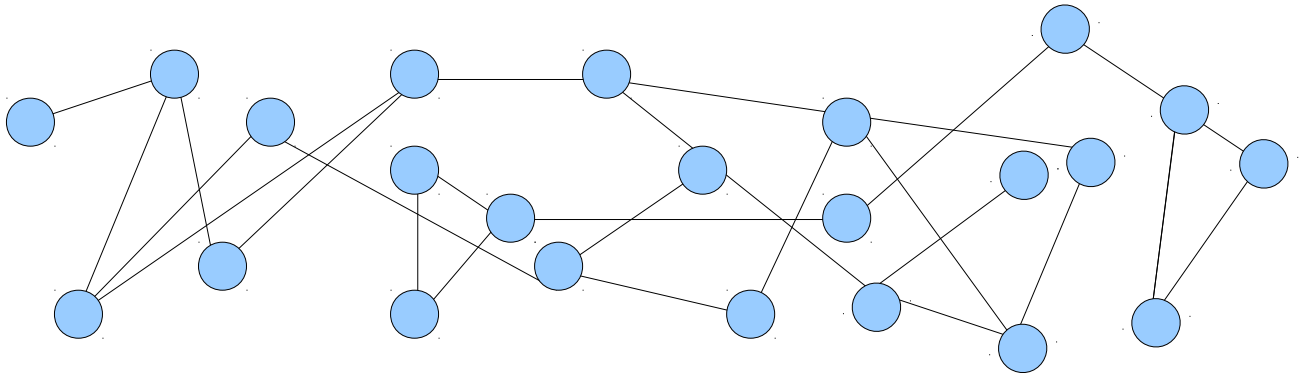
Componentes Conexos

- Maiores subgrafos “conectados” de um grafo
  - mais precisamente...
- Subgrafos maximais de G que sejam conexos
  - *maximal*: subconjunto que maximiza a propriedade, no caso subgrafo conexo
- Exemplo:



Componentes Conexos

- **Problema**: Determinar o número de componentes conexos de um grafo
  - e tamanho de cada componente



Algoritmo eficiente para resolver este problema?

Componentes Conexos

Usar Busca em Grafos (BFS ou DFS)

- Desmarcar todos os vértices
- Escolher vértice s qualquer
- Realizar BFS
- Vértices marcados determinam uma CC
- Escolher vértice s não marcado qualquer
- Realizar BFS
- Vértices marcados determinam outra CC
- ...

Componentes Conexos

Complexidade?

- Complexidade do algoritmo anterior
- Maior número de CC de um grafo?
- Custo para detectar cada CC?
- Usar marcações diferentes para cada CC

O(m + n)