

Teoria dos Grafos

Aula 8

Aula passada

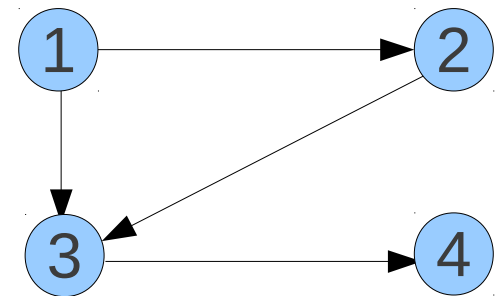
- Classe de funções e notação O , Ω , Θ
- Propriedades da notação
- Funções usuais
- Tempo de execução

Aula de hoje

- Grafos direcionados
- Busca em grafos direcionados
- Ordenação topológica

Grafo Direcionado (Dígrafo)

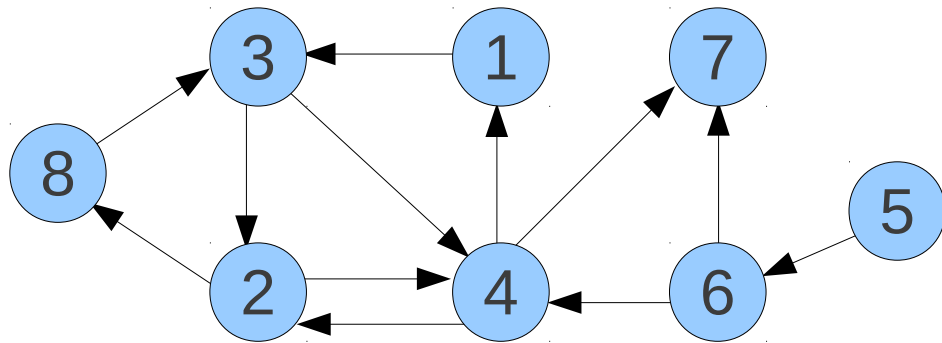
- Relacionamento não é simétrico!
 - A estar relacionado com B, **não** implica B estar relacionado com A
 - Exemplo de relacionamento assimétrico?
- Abstração: arestas têm “direção”
 - par de vértices é ordenado
- Exemplo: $G = (V, E)$
 - $V = \{1, 2, 3, 4\}$
 - $E = \{(1,2), (1,3), (2,3), (3,4)\}$



Grau

- Grau de entrada: número de arestas que “entram” em v : $|\{(*,v)\}|$
- Grau de saída: número de arestas que “saem” de v : $|\{(v,*)\}|$

- Exemplo: $G = (V, E)$



- $g_e(3) = ?$

- $g_s(3) = ?$

- $g_e(4) = ?$

- $g_s(7) = ?$

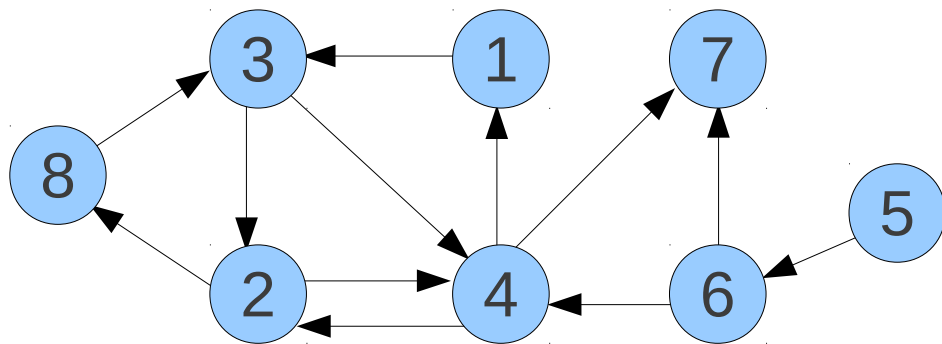
- Número máximo de arestas em G ? ← $n(n-1)$

- Relação entre $g_e(v)$ e $g_s(v)$? ← Nenhuma

Caminho, Ciclo, Distância

- Mesma definição de antes!
- Respeitando o direcionamento das arestas

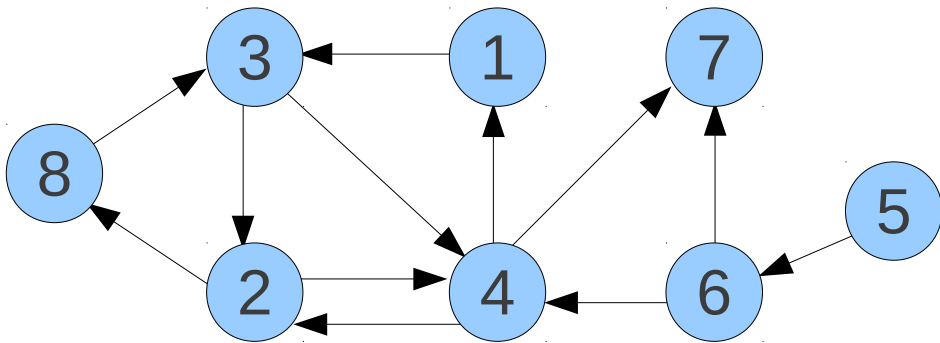
■ Exemplo: $G = (V, E)$



- Existe caminho de 5 para 2?
- Ciclo que contém 1?
- $d(2,8) = ?$
- $d(8,2) = ?$
- $d(7,1) = ?$

Fortemente Conexo

- Análogo a conexo (no caso não direcionado)
- Existe caminho entre qualquer par de vértices
 - mas caminho de u a v , **não** implica caminho de v a u
- Exemplo: $G = (V, E)$

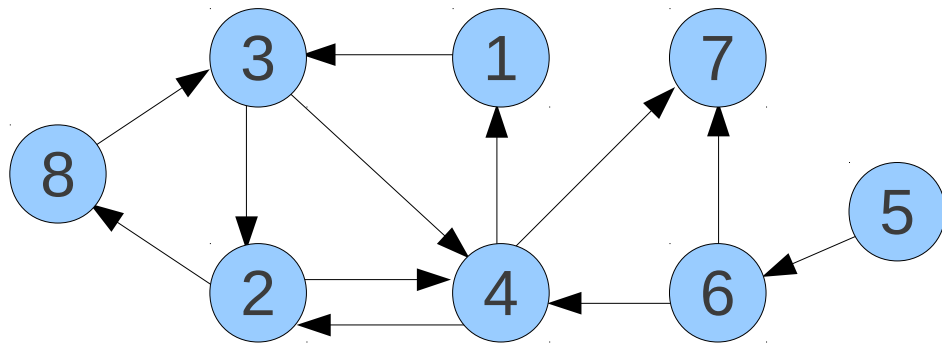


- É fortemente conexo?

Componentes Fortemente Conexos

- Análogo a componentes conexos
- Subgrafos maximais de G que são fortemente conexos

■ Exemplo: $G = (V, E)$



- Componentes fortemente conexos?

Busca em Grafos Direcionados

Mesma idéia!

- Busca precisa respeitar direcionamento das arestas
 - (u, v) não é igual a (v, u)
- BFS e DFS praticamente idênticos
- Mesmos algoritmos, mesma complexidade

Mas há diferenças

Busca em Grafos Direcionados

- Escolher vértice s (grafo direcionado)
- Executar BFS à partir de s
- Qual significado dos vértices marcados?

Vértices que s alcança!

- Tais vértices alcançam s ?
 - existe caminho de volta a s ?

Busca em Grafos Direcionados

- Como descobrir quais vértices alcançam s ?
- Solução ruim
 - Para cada vértice do grafo, executar BFS e verificar se s é marcado

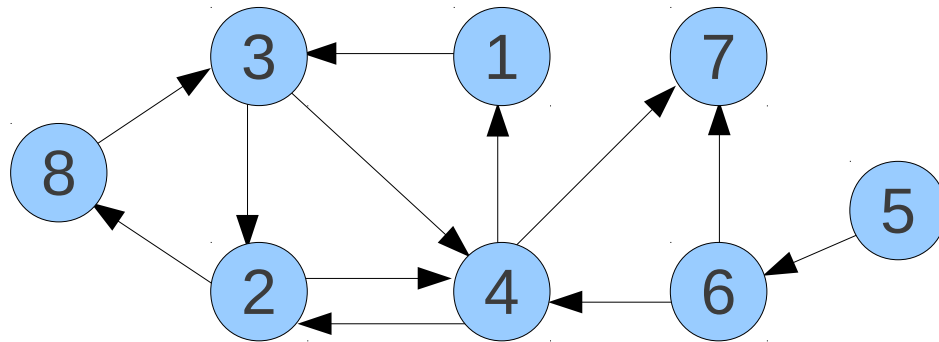
Idéias melhores?

- **Inverter a direção das arestas!**
 - executar BFS no novo grafo à partir de s
 - vértices que s alcançou, alcançam s no grafo original!

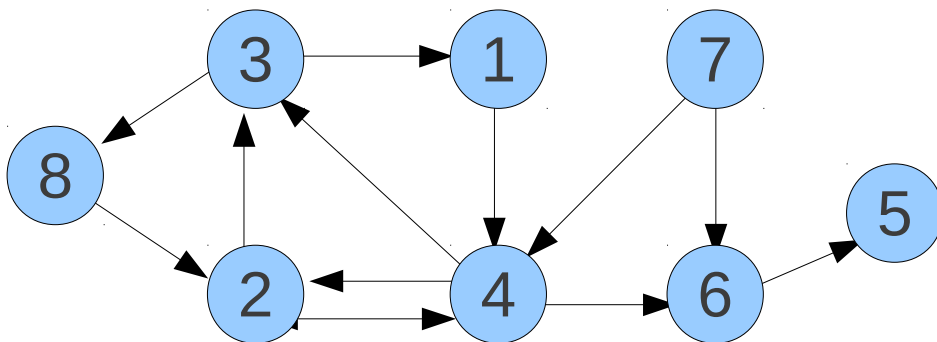
Busca em Grafos Direcionados

■ Exemplo

- determinar vértices que chegam em 1?



■ Grafo revertido: G_{rev}



- Executar BFS à partir de 1
- Vértices marcados chegam em 1 no grafo original

Fortemente Conexo

- **Problema:** Como determinar se um grafo direcionado é fortemente conexo?
- Como fizemos no caso não-direcionado?
 - Escolher nó inicial, executar BFS, verificar marcação

Idéias?

- Mesmo princípio de antes!
 - Se s chega aos vértices u e v , e os vértices u e v chegam a s
 - Então u chega a v , via s

Fortemente Conexo

- **Problema:** Como determinar se um grafo direcionado é fortemente conexo?
- Escolher vértice s qualquer
- Executar BFS à partir de s
- Construir G_{rev}
- Executar BFS à partir de s em G_{rev}
- Se todos os vértices foram marcados nas duas buscas, então G é fortemente conexo

Complexidade?

Executando Tarefas

- **N** tarefas precisam ser executadas
- Tarefas são dependentes
 - ex. tarefa B só pode ser executada depois de A
- **Problema:** Qual ordem de execução não viola as dependências?



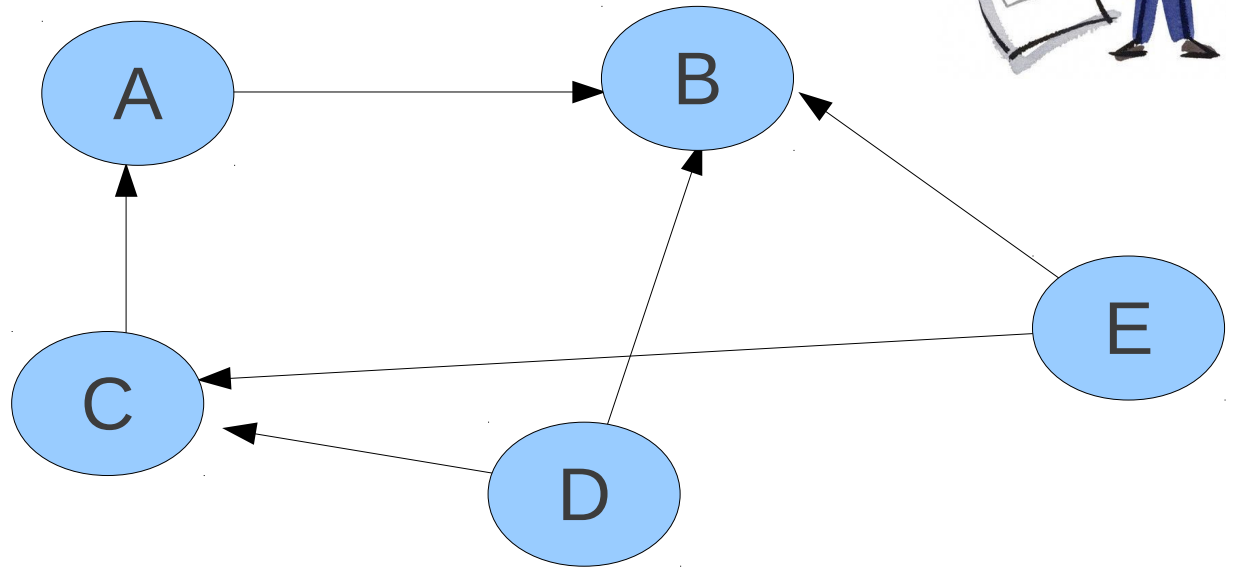
Modelar problema utilizando grafos direcionados

Executando Tarefas



■ Exemplo com 5 tarefas

B depende de A
A depende de C
C depende de D
B depende de E
B depende de D
C depende de E



■ Qual é a ordem de execução?

DAG

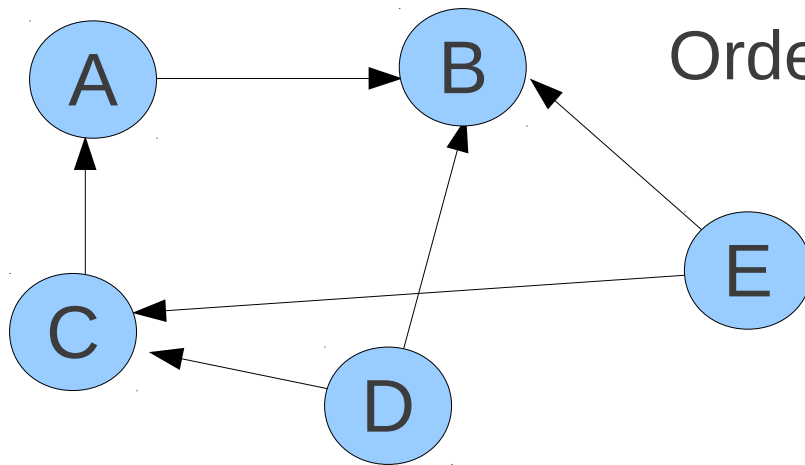
- Grafo direcionado acíclico (DAG, em inglês)
 - importante estrutura em grafos!
- Tarefas podem ser executadas, somente se grafo de dependência é um DAG
 - não podemos ter ciclos!
- Dado um DAG, como descobrir ordem de execução das tarefas?



Algoritmo (eficiente)!

Ordenação Topológica

- Ordenação dos vértices de forma que arestas “apontam” sempre para frente
- Dado grafo direcionado G
- Ordenação dos vértices de G : v_1, v_2, \dots, v_n , tal que para toda aresta (v_i, v_j) , $i < j$



Ordenação topológica?

$$v_1 = E$$

$$v_2 = D$$

$$v_3 = C$$

$$v_4 = A$$

$$v_5 = B$$

Ordenação Topológica

- Define uma ordem de execução das tarefas
- **Problema:** Dado um DAG, como determinar uma ordenação topológica?

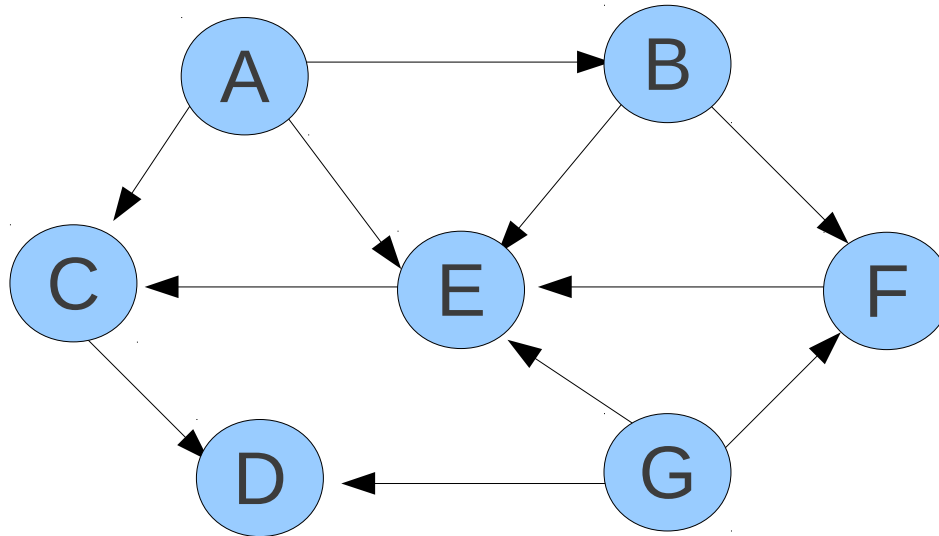
Idéias?

Ordenação Topológica

■ Algoritmo

1. $Ordem = \emptyset$
2. Enquanto $|V| > 0$ faça
3. Encontrar u com grau de entrada zero
4. $Ordem = Ordem + u$
5. Remover u do grafo G

■ Exemplo



Ordenação Topológica

■ Complexidade?

1. $Ordem = 0$

2. Enquanto $|V| > 0$ faça

3. Encontrar u com grau de entrada zero

4. $Ordem = Ordem + u$

5. Remover u do grafo G

■ Depende do tempo necessário para encontrar u

■ Procurar sequencialmente: $O(n)$

■ Complexidade $O(n^2)$

Ordenação Topológica



- Como melhorar complexidade?
- Complexidade: $O(m + n)$