1. Representações e Árvores

1. Considere o algoritmo dado para determinar o grau dos vértices de um grafo não direcionado. Adapte-o para um algoritmo para determinar o grau de saída dos vértices de um digrafo.

2. Dada a representação de um digrafo por sua lista de adjacências de saída, quanto tempo gasta para computar o grau de entrada de cada vértice? É necessário determinar a lista de adjacências de entrada, a priori?

3. Chamamos de Δ o grau máximo em um grafo, isto é, o grau máximo de um vértice de G. Prove que uma árvore com n vértices possui (a) pelo menos Δ folhas; (b) exatamente $n-1$ arestas.

4. É verdade que todo grafo conexo contém ao menos uma árvore geradora? Explique. É possível, com esta afirmação dizer que se temos um grafo conexo, (a) $m \geq n-1$ (b) $n = O(m)$?

5. De uma forma geral, é recomenável revisar todas as propriedades de árvores. E todos os teoremas de caracterização (Seção 2.3 do livro do Jayme). Liste todas as propriedades encontradas na referência, inclusive com a prova dos teoremas.

6. Descreva um algoritmo (o mais eficiente possível) que, dado um grafo (ou digrafo) por sua matriz de adjacências, determina sua lista de adjacências. Qual é a sua complexidade?

7. O *quadrado* de um grafo $G = (V, E)$ é o grafo $G^2 = (V, E')$ tal que $uv \in E'$ se e somente se existe um caminho com exatamente duas arestas de u para v em G ou $uv \in E(G)$. Descreva algoritmos eficientes para calcular G^2, dado G por sua (a) matriz de adjacências; (b) lista de adjacências.

8. Dê um algoritmo $O(n)$ para, dado um vetor de n elementos indexado pelos vértices do grafo, contendo os seus graus, ordenar os vértices por ordem não decrescente de graus, isto é, da forma que: o vértice u vem antes que o vértice v na ordem, se e somente se, $g(u) \leq g(v)$.

   Por que é possível fazer esta ordenação em tempo $O(n)$ quanto "a cota inferior para o problema de ordenação de n valores é $\Omega(n \log n)$"?

9. Seja A a matriz de adjacências de um grafo G e seja k um número inteiro. O que representam as entradas da matriz A^k? Prove.

10. Seja R uma matriz de adjacências de um digrafo acíclico D, construída segundo uma permutação de seus vértices que corresponde a uma ordenação topológica. Mostre que R é uma matriz triangular.