Teoria dos Grafos - 1: Grafos, subgrafos, caminhos e ciclos

1. Seja $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ com $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$ uma sequência de números naturais. Mostre que

   (a) d é uma sequência de graus de um grafo (não necessariamente simples) se, e somente se, $\sum_{i=1}^{n} d_i$ é par.

   (b) d é gráfica se, e somente se, $d' = (d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n)$ é gráfica.

2. Mostre que em todo grafo simples existem ao menos dois vértices com o mesmo grau.

3. O *k-cubo*, denotado Q_k, é o grafo (simples) cujos vértices são todas as sequências de 0's e 1's com k dígitos, de tal modo que dois vértices são adjacentes se e somente se as sequências correspondentes diferem em exatamente uma posição.

   (a) Desenhe os grafos Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4.

   (b) Mostre que um k-cubo é um grafo regular.

   (c) Quantos vértices e arestas tem um k-cubo?

   (d) Mostre que Q_k é bipartido, para todo k.

4. Mostre que se G é um grafo simples, então as entradas da diagonal da matriz A^2 e da matriz II^t são os graus dos vértices de G. Onde A é a matriz de adjacências e I a matriz de incidência de G.

5. Um grafo (simples) é dito *auto-complementar* se G é isomorfo a $\overline{G}$.

   (a) Dê dois exemplos de grafos auto-complementares (diferentes dos vistos em sala).

   (b) Prove que um grafo auto-complementar tem ordem $4k$ ou $4k + 1$, onde $k \in \mathbb{N}$.

6. Prove que se $d(v) \geq 3$, para todo vértice v de um grafo G, então G tem um ciclo par.