TEOREMA DE TURÁN

TEORIA EXTREMAL DE GRAFOS

→ QUAL É O MAIOR NÚMERO DE ARESTAS EM UM GRAFO QUE EVITA UMA DETERMINADA ESTRUTURA?

→ PENSE QUE n (O NÚMERO DE VÉRTICES ESTÁ FIXADO)

→ QUAL É O MAIOR NÚMERO DE ARESTAS EM UM GRAFO ACÍCLICO?

$$n-1$$

EM PARTICULAR TODO GRAFO ACÍCLICO COM $n-1$ ARESTAS É UMA ÁRVORE, LOGO É CONEXO.

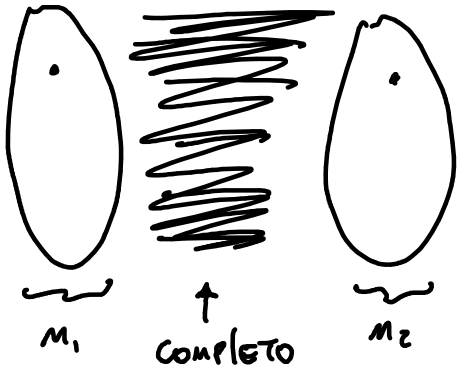
→ QUAL É O MAIOR NÚMERO DE ARESTAS EM UM GRAFO SEM CICLOS ÍMPARES?

TEO: G É BIPARTIDO SE E SÓ SE G NÃO POSSUI CICLOS ÍMPARES.

→ Qual é o maior número de arestas em um grafo sem ciclos ímpares?

TEO: G é bipartido se e só se G não possui ciclos ímpares.

G_1 =

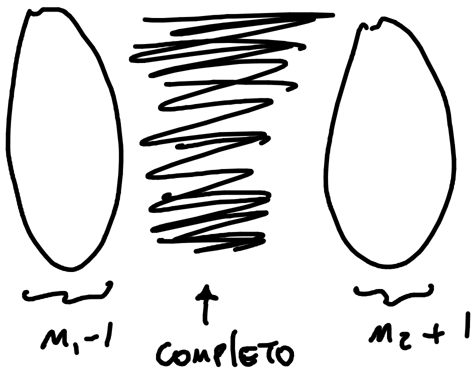


$m_1 + m_2 = n$

$e(G_1) = m_1 \cdot m_2$

Suponha que $m_1 \geq m_2 + 2$

G_2 =



$$e(G_2) = (m_1 - 1)(m_2 + 1)$$

$$= m_1 \cdot m_2 - m_2 + m_1 - 1$$

$$\geq m_1 \cdot m_2 - \cancel{m_2} + \cancel{m_2} + \cancel{2} - \cancel{1}$$

$$= m_1 \cdot m_2 + 1$$

$$= e(G_1) + 1$$

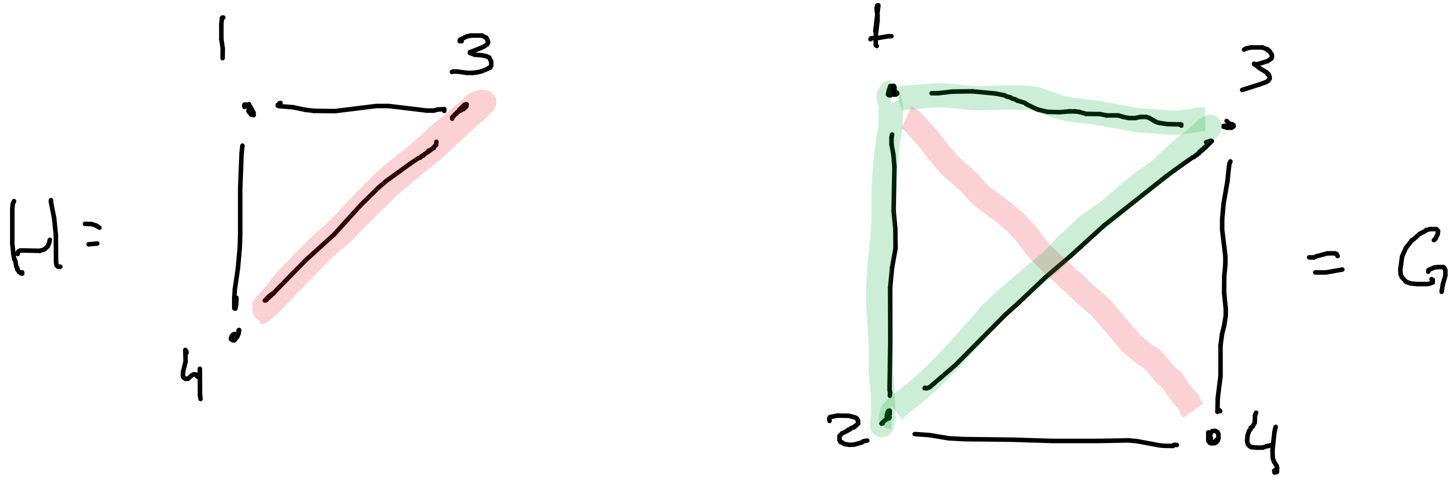
→ Bipartido completo balanceado $e\left(K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}\right) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil$

→ QUEREMOS PROIBIR UM ÚNICO GRAFO FIXADO H.

→ $H \subseteq G$ SE $V(H) \subseteq V(G)$ E $E(H) \subseteq E(G)$

↳ SUBGRAFO (NO CURSO DE GRAFOS)

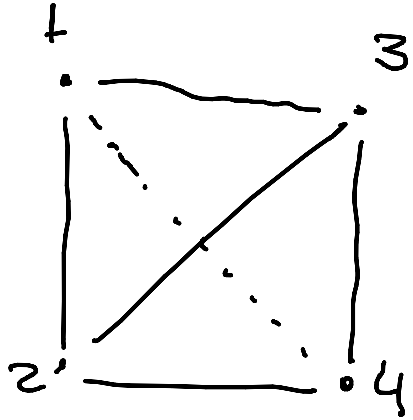
EX:

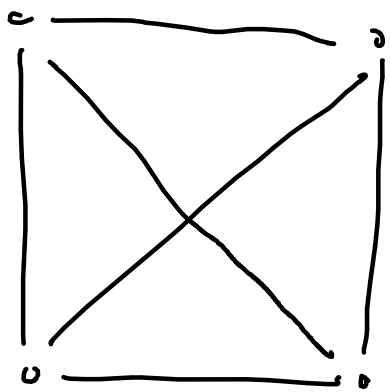


• AQUI VAMOS DIZER QUE G CONTÉM UMA CÓPIA DE H

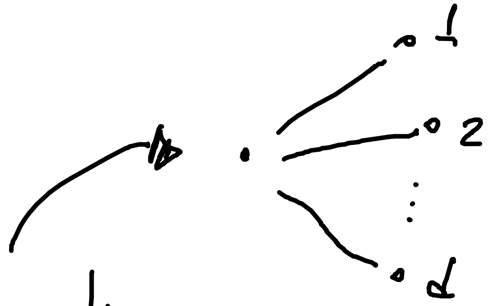
SE G POSSUI UM SUBGRAFO H' ISOMORFO A H.

• AQUI $H \subseteq G$ SIGNIFICA G CONTÉM CÓPIA DE H.

$H =$ 

 $= G$

DEF: DIZEMOS G É H-LIVRE, LIVRE DE H, OU SEM H SE G NÃO CONTÉM CÓPIA DE H.



EX: TODO GRAFO BIPARTIDO É K_3-LIVRE.

EX: G TEM GRAU MÁXIMO d SE G É $K_{1,d}$-LIVRE

DEF: DADO GRAFO H, O MAIOR NÚMERO DE ARESTAS DE UM GRAFO H-LIVRE COM n VÉRTICES É CHAMADO O NÚMERO EXTREMAL DE H, DENOTADO POR $ex(n, H)$

$$ex(n, H) = \max\{e(G) : v(G) = n,\ G \text{ é } H\text{-livre}\}$$

DEF: DADO GRAFO H, O MAIOR NÚMERO DE ARESTAS DE UM GRAFO H-livre COM n VÉRTICES É CHAMADO O NÚMERO EXTREMAl DE H, DENOTADO POR $ex(n,H)$

$$ex(n,H) = \max\{e(G) : v(G)=n,\ G \text{ é } H\text{-livre}\}$$

TAMBÉM ESTAMOS INTERESSADOS EM DETERMINAR A FAMÍlia DE GRAFOS QUE MAXIMIZA ESTE NÚMERO DE ARESTAS

DEF: UM GRAFO H-livre G COM PRECISAMENTE $ex(n,H)$ ARESTA É DITO H-EXTREMAl

Teorema de Mantel (1907)

Seja $n \in \mathbb{N}$ e seja G um grafo K_3-livre com n vértices.

Então

$$e(G) \leq \frac{n^2}{4}$$

Além disso, $e(G) = \lfloor n^2/4 \rfloor$ se e somente se $G = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$

Dem: Por indução em n. Para $n=1$ e $n=2$ é trivial.

Seja G um grafo K_3-livre com n vértices e suponha que o resultado vale para $n-2$.

Seja $uv \in E(G)$ e defina $G' = G - u - v$. Note que G' é K_3-livre.

Pela H.I. temos

$$e(G') \leq \frac{(n-2)^2}{4}$$

Dem: Por indução em n. Para $n=1$ e $n=2$ é trivial.

Seja G um grafo K_3-livre com n vértices e suponha que o resultado vale para $n-2$.

Seja $uv \in E(G)$ e defina $G' = G - u - v$. Note que G' é K_3-livre.

Pela H.I. temos

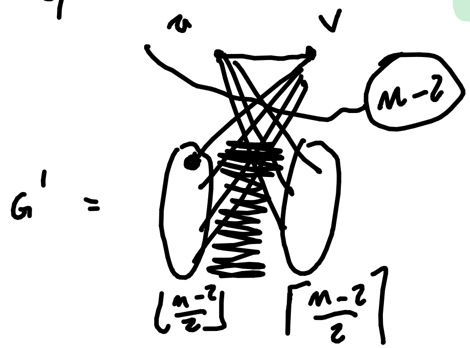
$$e(G') \leqq \frac{(n-2)^2}{4}$$

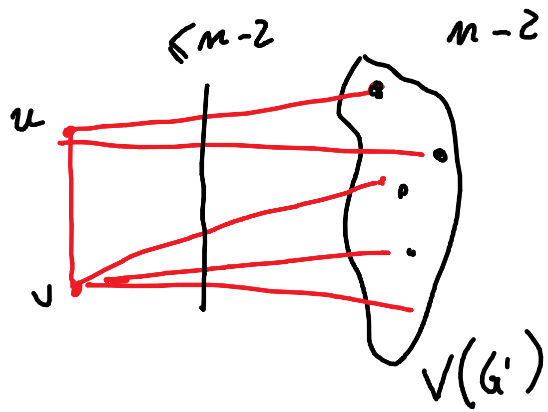
$$\frac{(n-2)^2}{4} = \frac{n^2 - \cancel{4n} + \cancel{4}}{4} + \cancel{n} - \cancel{1} = \frac{n^2}{4}$$

Como G é K_3-livre, u e v não possuem vizinhos em comum.

Logo

$$e(G) \leqq e(G') + n - 1 \leqq \frac{(n-2)^2}{4} + n - 1 = \frac{n^2}{4}$$

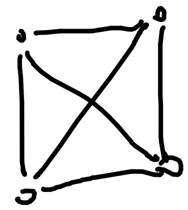




Corolário: $ex(n, K_3) = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$

Teorema de Turán

$H = K_4$



Tripartido

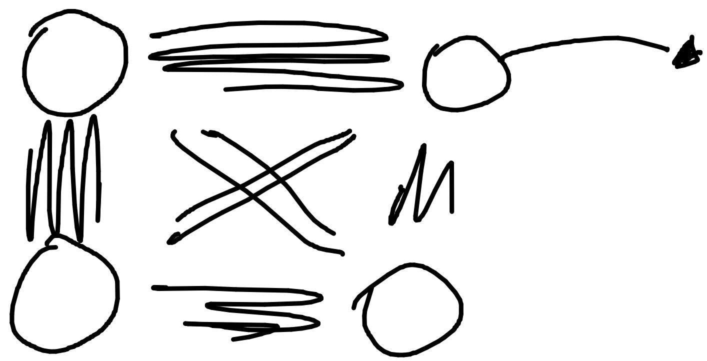
Número cromático.

Colorações de vértices própria

Def: Uma coloração $c: V(G) \to [k]$ é própria se para toda $uv \in E(G)$ $c(u) \neq c(v)$.

Def: O número cromático de um grafo G é o menor k t.q. G admite uma coloração própria $c: V(G) \to [k]$.

Notação: $\chi(G)$

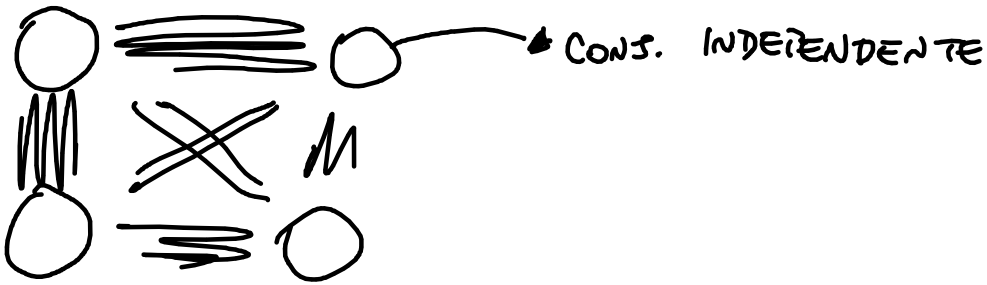


Conj. independente

DEF: Uma coloração $c: V(G) \longrightarrow [k]$ é **própria** se para toda $uv \in E(G)$ $c(u) \neq c(v)$.

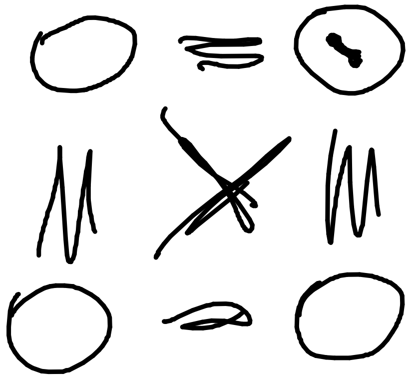
DEF: O número cromático de um grafo G é o menor k t.q. G admite uma coloração própria $c: V(G) \longrightarrow [k]$.

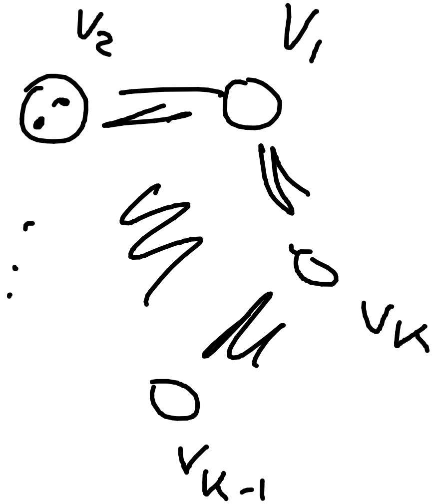
Notação: $\chi(G)$



OBS: Se $\chi(G) = k$, então G é K_{k+1}-livre.

Ex: $\chi(G) = 4$ $\longrightarrow$ K_5-livre?





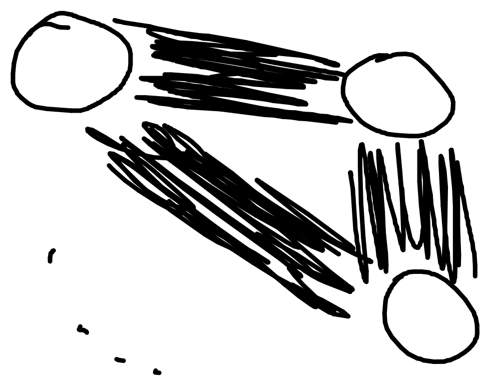
DEF: Um grafo G é dito K-PARTIDO se V(G) pode ser particionado em conjuntos $A_1, \dots, A_K$ em que A_i é independente

NÃO HÁ ARESTA LIGANDO DOIS VÉRTICES DE A_i

DEF: Dizemos que G é K-PARTIDO COMPLETO se G K-PARTIDO com partes $A_1, \dots, A_K$ T.q.

$$E(G) = \bigcup_{1 \leq i < j \leq K} \{ uv : u \in A_i \text{ e } v \in A_j \}$$

Ou seja se G possui todas as arestas entre suas partes

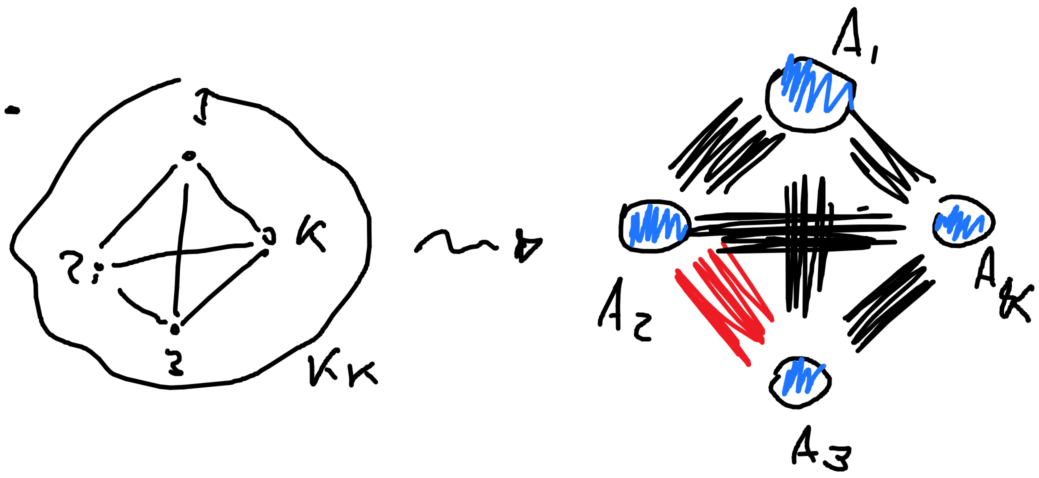


DEF: O grafo de Turán $T_k(n)$ é o grafo k-partido completo com o maior número de arestas possível.

Exercício: ↳ "balanceado", i.e., $||A_i| - |A_j|| \leq 1$

Escrevemos $t_k(n)$ para denotar o número de arestas de $T_k(n)$

Se n é múltiplo de k, então $T_k(n)$ possui exatamente $\frac{n}{k}$ vértices em cada parte.



Portanto

$$e(G) = \left(\frac{n}{k}\right)^2 \cdot \binom{k}{2} = \frac{n^2}{k^{\cancel{2}}} \cdot \frac{\cancel{k}(k-1)}{2} = \frac{k-1}{k} \cdot \frac{n^2}{2} = \left(1 - \frac{1}{k}\right)\frac{n^2}{2}$$

TEOREMA (TURÁN, 1941). SEJAM $n, k \in \mathbb{N}$ E SEJA G UM GRAFO K_{k+1}-LIVRE COM n VÉRTICES. ENTÃO

$$e(G) \leq t_k(G)$$

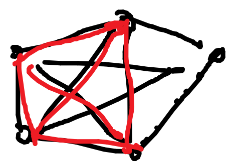
ALÉM DISSO, $e(G) = t_k(n)$ SE E SOMENTE SE $G = T_k(n)$

DEM: INDUÇÃO EM n. SE $n \leq k$ O RESULTADO É TRIVIAL, POIS TODO GRAFO COM MENOS DO QUE k VTXS É K_{k+1}-LIVRE E NESTE CASO $T_k(n) = K_n$.

PODEMOS SUPOR QUE G É UM GRAFO K_{k+1}-LIVRE MAXIMAL (i.e. QUE A ADIÇÃO DE QUALQUER ARESTA "CRIA" UM K_{k+1})

E SUPONHA QUE O TEOREMA VALE PARA GRAFOS COM $n-k$ VTXS.

G POSSUI CÓPIA A DE K_k, PELA MAXIMALIDADE DE G.

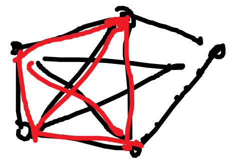


Dem: Indução em n. Se $n \leq k$ o resultado é trivial, pois todo grafo com menos do que k vtxs é K_{k+1}-livre e neste caso $T_k(n) = K_n$.

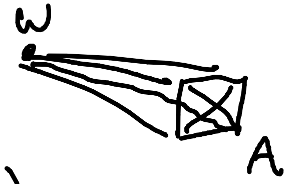
Podemos supor que G é um grafo K_{k+1}-livre maximal (i.e. que a adição de qualquer aresta "cria" um K_{k+1})

E suponha que o teorema vale para grafos com $n-k$ vtxs.

G possui cópia A de K_k, pela maximalidade de G.



Note que $G' = G \setminus A$ é um grafo K_{k+1}-livre com $n-k$ vtxs.

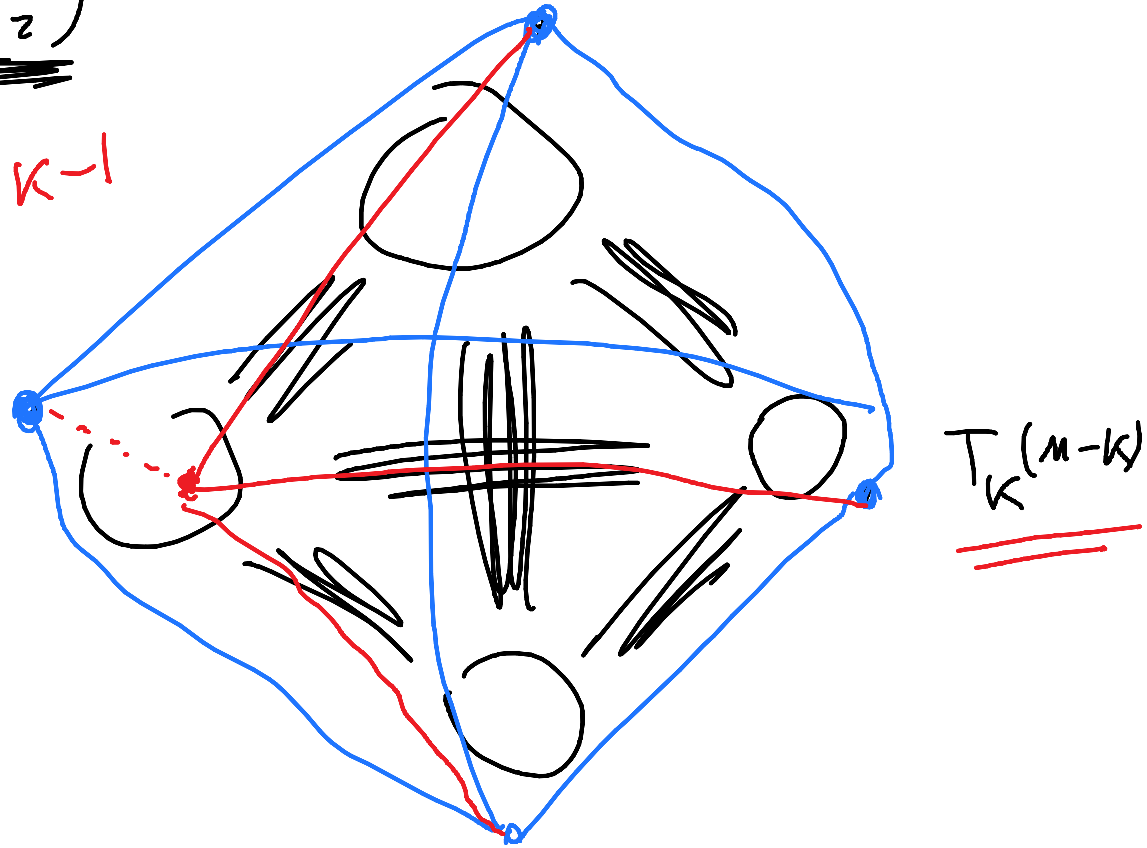


Pela HI., $e(G') \leq t_k(n-k)$

Além disso, como G é K_{k+1}-livre todo vtx $w \in V(G)$ tem no máx $k-1$ vizinhos em A logo

$$e(G) \leq e(G') + \binom{k}{2} + \underbrace{(n-k)}_{\substack{\text{vtxs}\\ G'}}\underbrace{(k-1)}_{\substack{\text{vtxs}\\ A}} \leq t_k(n-k) + \binom{k}{2} + (n-k)(k-1) = t_k(n)$$

$$t_k(n) = t_k(n-k) + (n-k)(k-1) + \binom{k}{2}$$



K_k $\binom{k}{2}$

$n-k+k$

$(n-k)(k-1)$