UMA OUTRA PROVA DO TEOREMA DE TURÁN

<u>TEOREMA (ERDŐS)</u>: SEJA $n, k \in \mathbb{N}$, E SEJA G UM GRAFO K_{k+1}-LIVRE COM n VÉRTICES. ENTÃO EXISTE UM GRAFO k-PARTIDO H COM $V(H) = V(G)$ TAL QUE PARA TODO $v \in V(G)$ TEMOS

$$d_H(v) \geq d_G(v)$$

<u>OBS</u>: $e(H) \geq e(G)$

SIMETRIZAÇÃO DE ZYKOV: SE $uv \notin E(G)$, ENTÃO PODEMOS SUBSTITUIR v POR UMA "CÓPIA" DE u, SEM CRIAR CÓPIAS DE K_{k+1}.

TEOREMA (ERDŐS): SEJA $n, k \in \mathbb{N}$, E SEJA G UM GRAFO K_{k+1}-LIVRE COM n VÉRTICES. ENTÃO EXISTE UM GRAFO k-PARTIDO H COM $V(H)=V(G)$ TAL QUE PARA TODO $v \in V(G)$ TEMOS

$$d_H(v) \geq d_G(v)$$

PROVA: INDUÇÃO EM k. O TEOREMA É TRIVIAL SE $k=1$.

SUPONHA QUE $k \geq 2$ E QUE O RESULTADO VALE PARA $k-1$.

SEJA G UM GRAFO K_{k+1}-LIVRE COM n VÉRTICE E SEJA u UM VÉRTICE DE GRAU MÁXIMO EM G.

NOTE QUE $N_G(u)$ INDUZ UM GRAFO G' K_k-LIVRE. PELA H.I., EXISTE GRAFO $(k-1)$-PARTIDO H' T.q. $V(H') = N_G(u)$ E

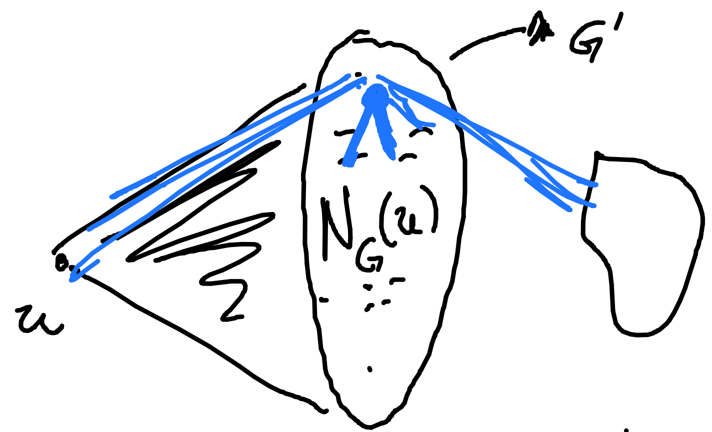
$$d_{H'}(v) \geq d_{G'}(v)$$

PARA TODO $v \in N_G(u)$

PROVA: INDUÇÃO EM K. O TEOREMA É TRIVIAL SE $K=1$.

SUPONHA QUE $K \geq 2$ E QUE O RESULTADO VALE PARA $K-1$.

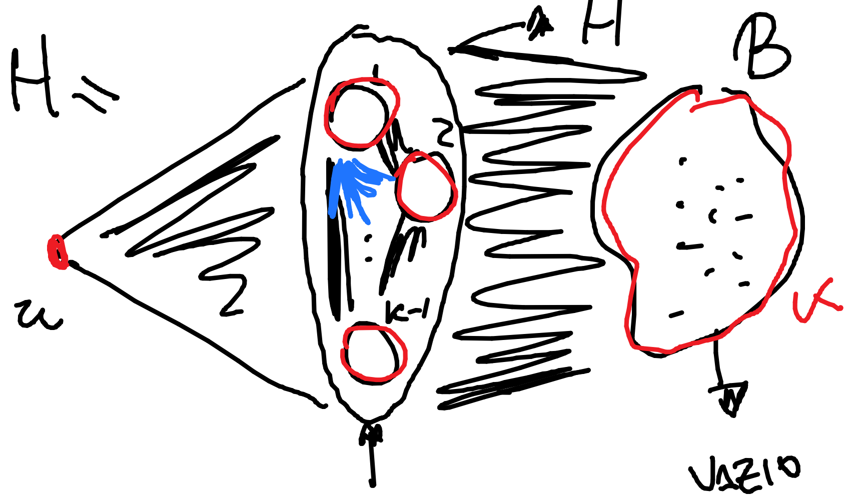
SEJA G UM GRAFO K_{K+1}-LIVRE COM n VÉRTICE E SEJA u UM VÉRTICE DE GRAU MÁXIMO EM G.



NOTE QUE $N_G(u)$ INDUZ UM GRAFO G' K_K-LIVRE. PELA H.I., EXISTE GRAFO $(K-1)$-PARTIDO H' T.Q. $V(H') = N_G(u)$ E

$$d_{H'}(v) \geq d_{G'}(v)$$

PARA TODO $v \in N_G(u)$



GRAU MÁXIMO

$$d_H(u) = d_G(u) = \Delta(G)$$

$$d_H(v) = \Delta(G) \geq d_G(v) \qquad v \in B$$

$$d_H(v) = d_{H'}(v) + 1 + |B| \qquad v \in N_G(u)$$

$$\geq d_{G'}(v) + \quad + |B| \geq d_G(v)$$

∎

PARA QUAIS GRAFOS H EXISTE CONSTANTE $C = C(H)$ TAL QUE

$$ex(n, H) \geqslant C \cdot n^2$$

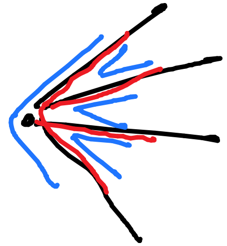
TODO GRAFO DE TURÁN POSSUI PELO MENOS $\frac{n^2}{4}$ ARESTAS

$$\left(1 - \frac{1}{k}\right)\frac{n^2}{2} \approx t_k(n)$$

MAIS GERALMENTE ISSO VALE PARA QUALQUER GRAFO H COM $\chi(H) \geqslant 3$.

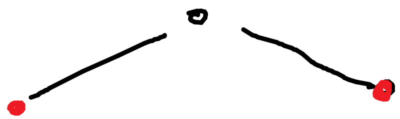
PORQUE $T_2(n)$ É H-LIVRE

NÚMERO EXTREMAIS DE GRAFOS BIPARTIDOS



Teorema (Erdős). Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$ex(n, C_4) \leq n^{3/2}$$

Prova: Contar cerejas:  é um caminho (u,v,w)

CENTRO

FOLHAS

Seja G um grafo C_4-livre.

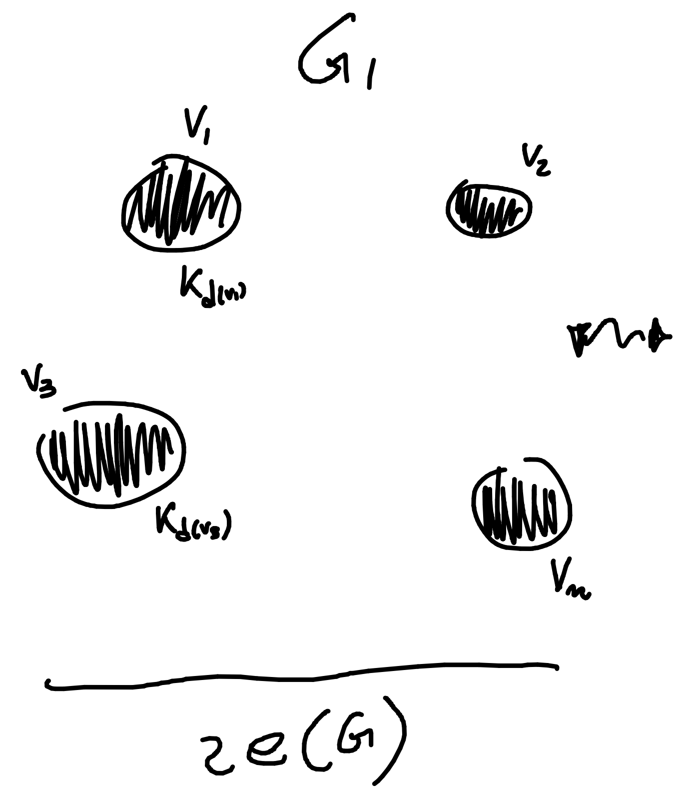
O número de cerejas centradas em $v \in V(G)$ é $\binom{d(v)}{2}$

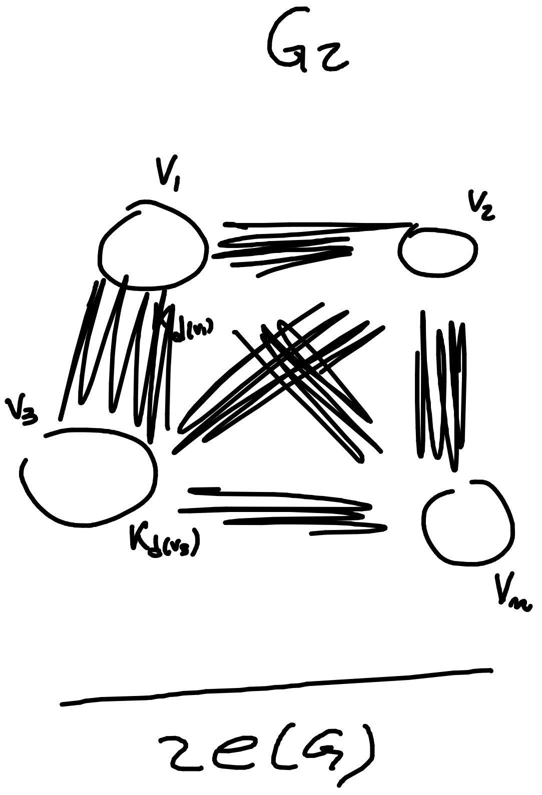
Logo, o número de cerejas de G é

$$\sum_{v \in V(G)} \binom{d(v)}{2} \geq n \cdot \binom{\frac{2e(G)}{n}}{2} = \frac{\cancel{n}\,\frac{\cancel{2}e(G)}{\cancel{n}}\left(\frac{2e(G)}{n} - 1\right)}{\cancel{2}} \sim \frac{e(G)^2}{n}$$

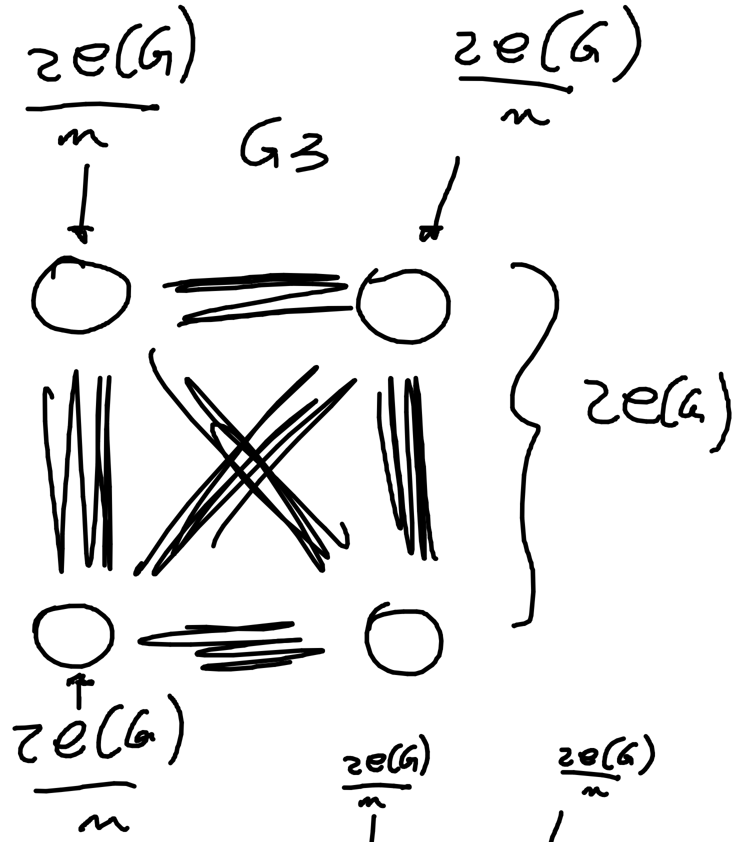
$$\sum_{v\in V(G)} \binom{d(v)}{2} \geq n \binom{\frac{2e(G)}{n}}{2}$$

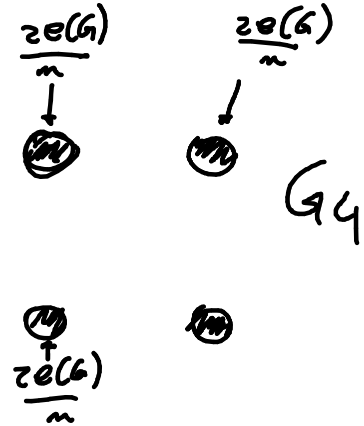
$$\underline{N} = \sum_{v\in V(G)} d(v) = 2e(G)$$



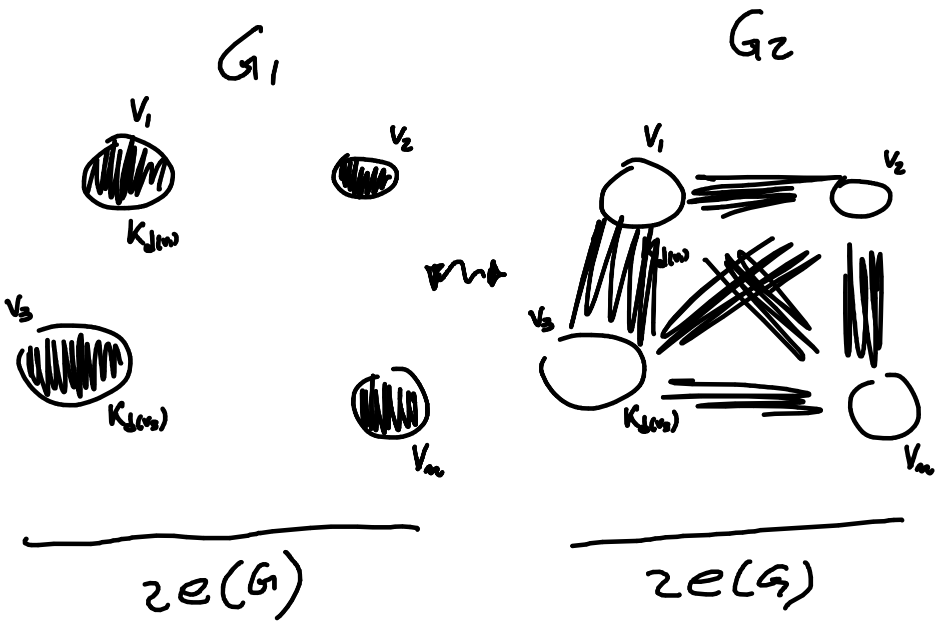


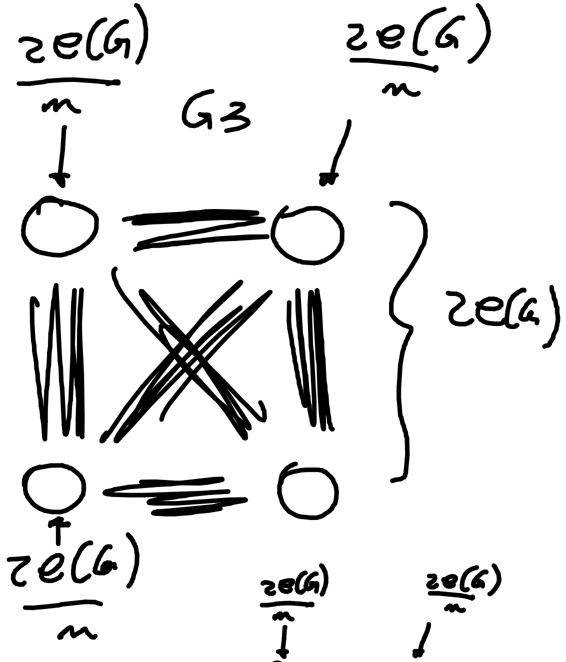
$\leq$

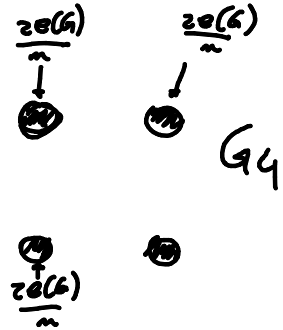




$$n \cdot \binom{\frac{2e(G)}{n}}{2}$$







$$n \cdot \binom{\frac{2e(G)}{n}}{2}$$

$$e(G_2) = \binom{n}{2} - e(G_1)$$

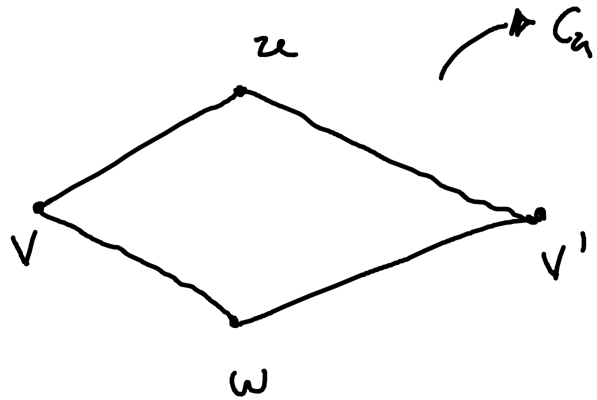
$$e(G_3) \geq e(G_2)$$

$$e(G_4) = \binom{n}{2} - e(G_3)$$

$$\binom{n}{2} - e(G_1) = e(G_2) \leq e(G_3) = \binom{n}{2} - e(G_4)$$

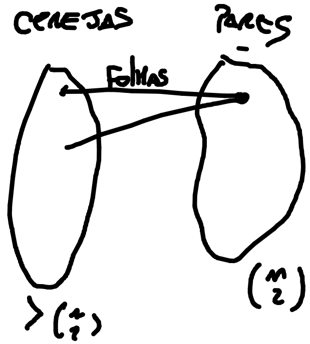
$$n\binom{\frac{2e(G)}{n}}{2} = e(G_4) \leq e(G_1) = \sum \binom{d(v)}{2}$$

$$\sum_{v\in V(G)} \binom{d(v)}{2} \geq \frac{e(G)^2}{n}$$



Note que cada par $\{u, w\}$ pode ser o conjunto de folhas de no máximo uma cereja, do contrário, há cópia de C_4 em G.

Logo, há no máximo $\binom{n}{2}$ cerejas.



Portanto

$$\frac{n^2}{2} > \binom{n}{2} \geq \sum_{v\in V(G)} \binom{d(v)}{2} \geq \frac{e(G)^2}{n}$$

Assim,

$$e(G) \leq \frac{n^{3/2}}{\sqrt{2}} < n^{3/2}$$

TEOREMA (KŐVARI, T. SÓS, TURÁN): SEJAM $s, t \in \mathbb{N}$ COM $s \leq t$.

EXISTE CONSTANTE $C = C(s,t) > 0$ TAL QUE

$$ex(n, K_{s,t}) \leq C n^{2-1/s}$$

SUPONHA QUE H SEJA UM GRAFO BIPARTIDO. E SEJA $K \approx K_{s,t}$ UM GRAFO BIPARTIDO COMPLETO QUE CONTENHA H. $H \subseteq K$

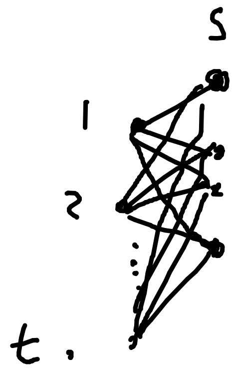
$$\lim \frac{Cn^{2-1/s}}{n^2} = 0$$

SE G É H-LIVRE, ENTÃO G É $K_{s,t}$-LIVRE

$$e(G) \leq ex(n, H) \leq ex(n, K_{s,t}) \leq C n^{2-1/s} = o(n^2)$$

OBS: SE $H_1 \subseteq H_2$, ENTÃO $ex(n, H_1) \leq ex(n, H_2)$

Teorema (Kővári, T. Sós, Turán): Sejam $s, t \in \mathbb{N}$ com $s \leq t$.



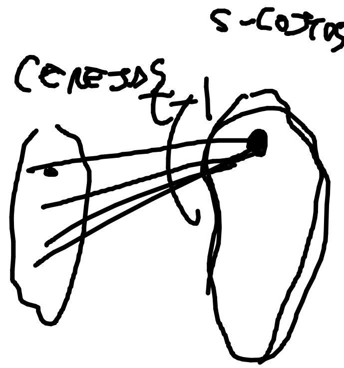
Existe constante $C = C(s,t) > 0$ tal que

$$ex(n, K_{s,t}) \leq C n^{2 - 1/s}$$

Prova: Contar s-cerejas, i.e., cópias de $K_{1,s}$.

O número de s-cerejas centradas em v é $\binom{d(v)}{s}$

Logo, o número de s-cerejas em G é



$$(t-1)\binom{n}{s} \geq \sum_{v \in V(G)} \binom{d(v)}{s} \overset{\text{convexidade}}{\geq} n \binom{2e(G)/n}{s} \geq n \cdot \left(\frac{e(G)}{sn}\right)^{s}$$

Como G é $K_{s,t}$-livre, não podemos ter t cerejas com o mesmo conjunto de folhas.

Logo, há no máximo $(t-1)\binom{n}{s}$ s-cerejas em G.

$$(t-1)\binom{n}{s} \geq \sum_{v\in V(G)} \binom{d(v)}{s} \overset{\text{CONVEXIDADE}}{\geq} n \binom{2e(G)/n}{s} \geq n\cdot\left(\frac{e(G)}{sn}\right)^s$$

$$(t-1)\,n^s \geq (t-1)\binom{n}{s} \geq n\cdot\left(\frac{e(G)}{sn}\right)^s$$

$$e(G)^s \leq (t-1)\,n^{s-1}\cdot s^s\cdot n^s = (t-1)\cdot s^s\cdot n^{2s-1}$$

$$e(G) = \underbrace{s\sqrt[s]{(t-1)}}_{C(s,t)}\cdot n^{2-1/s}$$

∎