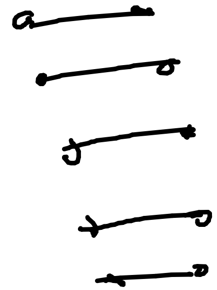
Números extremais de árvores

C_8

- Quão pequeno o número extremal pode ser?

Se $e(H) \leq 1$, então $ex(n,H) = 0$

Se $e(H) \geq 2$, então $ex(n,H) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$



porque todo emparelhamento é H-livre.

- Para quais grafos H existe C t.q. $ex(n,H) \leq C \cdot n$?

- Para quais grafos H existe C t.q. $ex(n, H) \leqslant C \cdot n$?

<u>Teorema</u>. Sejam $n, k \in \mathbb{N}$, e seja T uma árvore com $k+1$ vértices. Então

$$ex(n, T) \leqslant (k-1) \cdot n$$

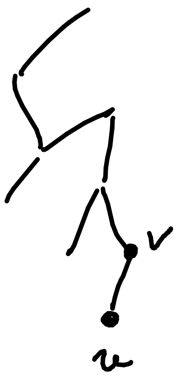
<u>Lema</u>: Seja $k \in \mathbb{N}$ e seja T uma árvore com $k+1$ vértices. Se $\delta(G) \geqslant k$, então $T \subseteq G$.

Lema 1: Seja $k \in \mathbb{N}$ e seja T uma árvore com $k+1$ vértices.

Se $\delta(G) \geq k$, então $T \subseteq G$.

Prova: Indução em k. Se $k=1$, não há o que fazer.

Então suponha que $k>1$ e que o resultado vale para $k-1$.

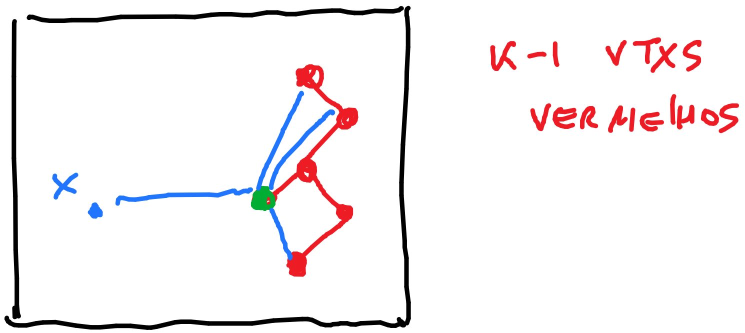


Seja u uma folha de T e tome $T' = T - u$,

e seja v o pai de u.

Obs: T' é uma árvore com k vértices.

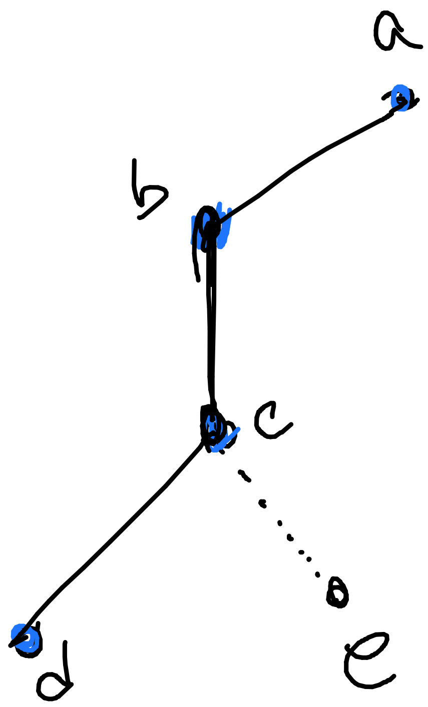
Pela H.I., $T' \subseteq G$. Seja $\varphi : V(T') \to V(G)$ o "mergulho" de T' em G.



Como $d(\varphi(v)) \geq k$, existe vizinho x de $\varphi(v)$ que não está em $\varphi(T')$.

Colocamos $\varphi(u) = x$. E φ é um mergulho de T em G.

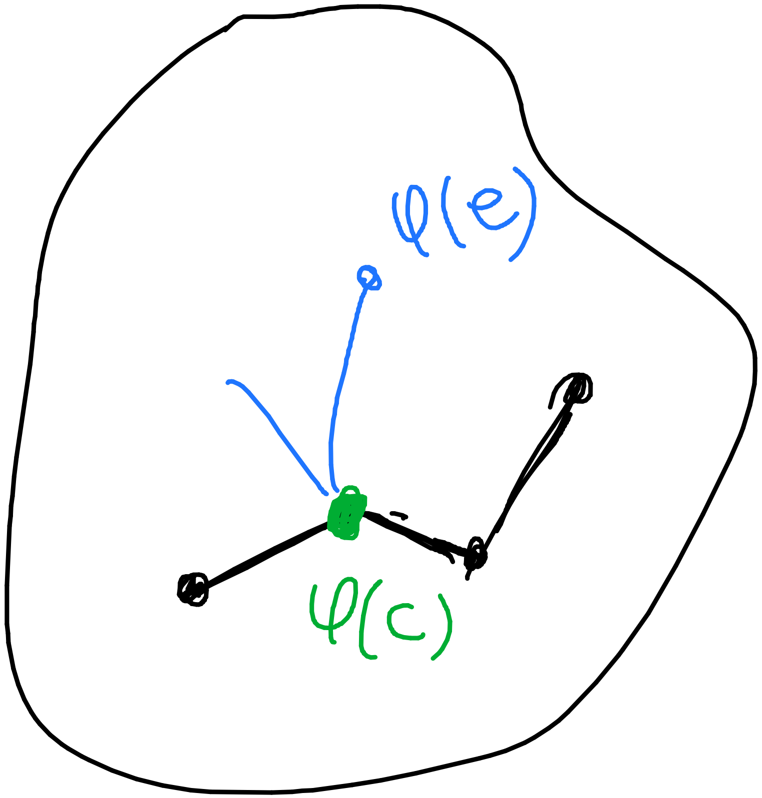
$k = 4$



$T' = T - e$

G

$\underline{\delta(G) \geq 4}$



SE $\delta(G) \geq 3$ ENTÃO G CONTÉM TODAS AS ÁRVORES COM 4 VTXS.

LEMA 2: TODO GRAFO G COM PELO MENOS UMA ARESTA POSSUI UM SUBGRAFO H T.Q.

$$\delta(H) > \frac{e(G)}{v(G)}$$

↳ # DE VÉRTICES DE G.

DEM: REMOVEMOS VÉRTICES COM GRAU MÍNIMO ENQUANTO NECESSÁRIO. OBTEMOS UMA SEQUÊNCIA DE GRAFOS

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \cdots \supset G_{m-1} \supset G_m = H$$

TAL QUE $G_i = G_{i-1} - v_i$ EM QUE $d_{G_{i-1}}(v_i) \leq \frac{e(G)}{v(G)}$

SE $m < v(G)$, ENTÃO $H \neq \emptyset$ É O GRAFO DESEJADO

SUPONHA QUE $m = v(G)$. ENTÃO

$$e(G) = \sum_{i=1}^{m-1} d_{G_{i-1}}(v_i) \leq (v(G)-1)\frac{e(G)}{v(G)} < e(G)$$

Teorema. Sejam $n, k \in \mathbb{N}$, e seja T uma árvore com $k+1$ vértices. Então

$$ex(n, T) < (k-1) \cdot n$$

Prova: Seja G um grafo t.q. $e(G) \geq (k-1) \cdot n$.

Pelo Lema 2, G possui um subgrafo H t.q.

$$\delta(H) > \frac{e(G)}{n} \geq \frac{(k-1) \cdot n}{n} = k-1$$

Como $\delta(H)$ é inteiro, temos $\delta(H) \geq k$.

Pelo Lema 1, H contém cópia T. $\blacksquare$

Teorema. Sejam $n, k \in \mathbb{N}$, e seja T uma árvore com $k+1$ vértices. Então

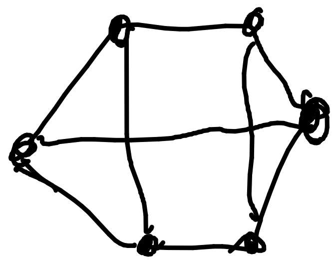
$$ex(n,T) < (k-1) \cdot n$$

- Certamente $(k-1)$ não é a menor constante

Ex: estrelas: $ex(n, K_{1,k}) = \frac{k-1}{2} \cdot n$

Extremal: $\Delta(G) \leq k-1$

Qualquer grafo $(k-1)$-regular



↳ Todos os graus são $k-1$

Conjectura (Erdős–Sós, 1963):

Sejam $n, k \in \mathbb{N}$, e seja T uma árvore com $k+1$ vértices. Então

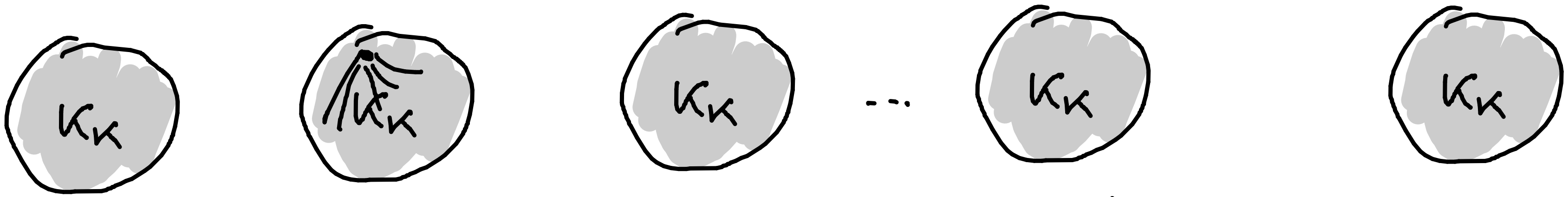
$$ex(n,T) \leq \left(\frac{k-1}{2}\right) \cdot n$$

Conjectura (Erdős–Sós, 1963):

Sejam $n, k \in \mathbb{N}$, e seja T uma árvore com $k+1$ vértices. Então

$$ex(n,T) \leq \left(\frac{k-1}{2}\right) \cdot n$$

OBS: A conjectura é justa

$G =$ 

$$\delta(G) = \Delta(G) = k-1 \rightsquigarrow e(G) = \frac{k-1}{2} \cdot n$$

e G é T-livre

DEF: DENOTAMOS POR P_K O CAMINHO COM K ARESTAS

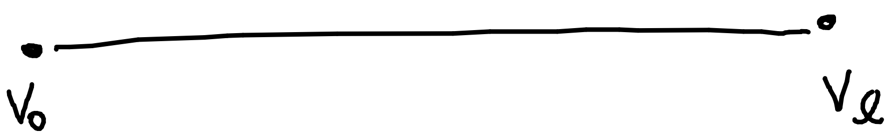
TEOREMA (ERDŐS - GALLAI): SEJAM $n, K \in \mathbb{N}$. ENTÃO

$$ex(n, P_K) = \frac{(k-1)}{2} \cdot n$$

LEMA: TODO GRAFO CONEXO COM n VÉRTICES POSSUI UM CAMINHO COM PELO MENOS $K = \min\{2\delta(G), n-1\}$ ARESTAS

PROVA: SEJA $P = (v_0, v_1, \dots, v_\ell)$ UM CAMINHO MÁXIMO

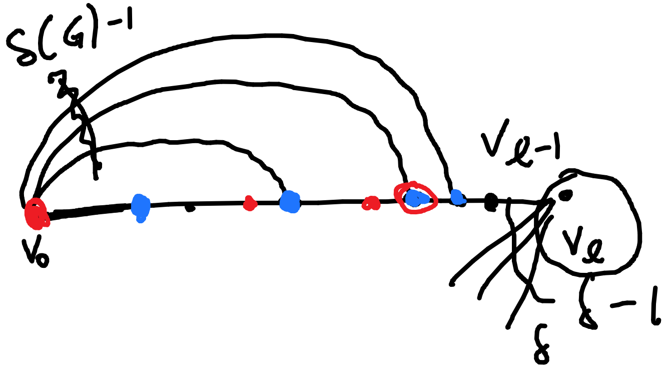
AF: SE $\ell < K$, ENTÃO EXISTE CICLO C T.Q. $V(C) = V(P)$.



Lema: Todo grafo conexo com n vértices possui um caminho com pelo menos $K = \min\{2\underline{\delta(G)}, n-1\}$ arestas

Prova: Seja $P = (v_0, v_1, \dots, v_\ell)$ um caminho máximo.

Af: Se $\underline{\underline{\ell < K}}$, então existe ciclo C t.q. $V(C) = V(P)$.



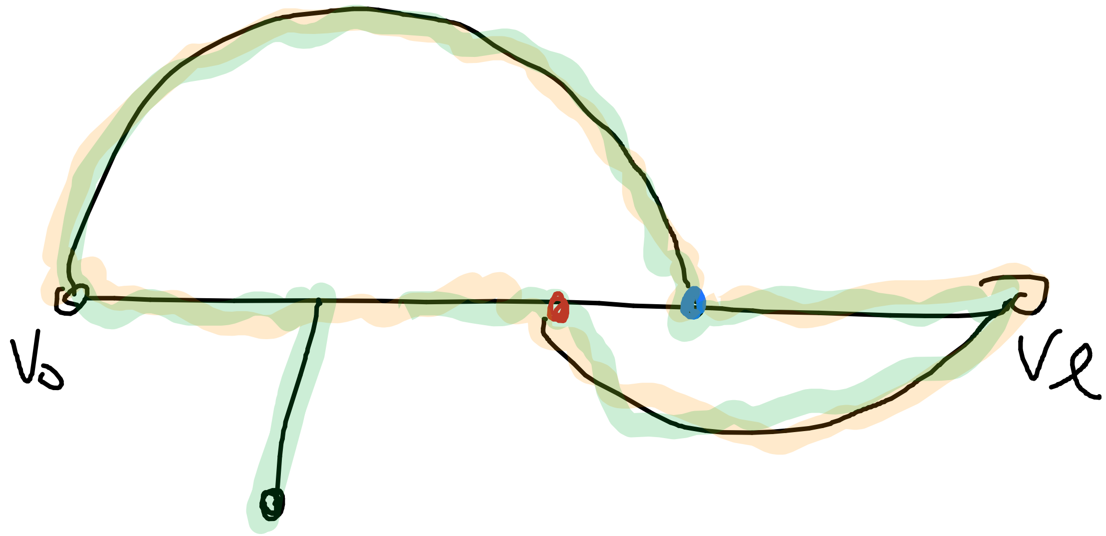
$\ell < K \leq 2\delta$

$\ell \leq 2\delta - 1$

vértices marcados de vermelho $= \delta(G)$

Então há $\ell + 1 - \delta \leq 2\delta - 1 + 1 - \delta = \delta$ vértices que não estão marcados de vermelho. Certamente v_ℓ é um desses.

Como v_ℓ possui pelo menos δ vizinhos em P, e v_ℓ não é vizinho de si mesmo. Logo v_ℓ possui um vizinho marcado (vermelho).



COMO G É CONEXO, SE HÁ VÉRTICE "FORA" DE P,
HÁ VÉRTICE FORA DE P ADJACENTE A UM VÉRTICE v DE P
E PODEMOS ENCONTRAR CAMINHO MAIOR QUE P. ∎