**DEF:** Denotamos por $P_k$ o caminho com $k$ arestas e $k+1$ vértices

**Teorema** (Erdős-Gallai): Sejam $n, k \in \mathbb{N}$. Então

$$ex(n, P_k) = \frac{(k-1)}{2} \cdot n$$

Equiv: A conjectura de Erdős-Sós vale para caminhos

**Prova:** Indução em $n$.

Seja $G$ um grafo com $n$ vértices que é $P_k$-livre

Se $n \leq k$, então $e(G) \leq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \leq \frac{n}{2}(k-1)$

Então podemos supor que $n \geq k+1$ e suponha que o resultado vale $n' < n$

**Lema:** Todo grafo conexo com $n$ vértices possui um caminho com pelo menos $\min\{2\delta(G), n-1\}$ arestas

**Corolário:** Seja $G$ um grafo conexo com pelo menos $k+1$ vértices. Se $\delta(G) \geq \frac{k}{2}$, então $P_k \subseteq G$.

**Prova:** Observe que $2\delta(G) \geq k$ e $n-1 \geq k$

Logo $\min\{2\delta(G), n-1\} \geq k$.

Pelo lema $G$ possui um caminho com $k$ arestas. $\blacksquare$

**Prova:** Indução em $n$.

Seja $G$ um grafo com $n$ vértices que é $P_k$-livre.

Se $n \leq k$, então $e(G) \leq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \leq \frac{n}{2}(k-1)$

Então podemos supor que $n \geq k+1$ e suponha que o resultado vale $n' < n$.

Suponha que $G$ não é conexo. Então $G = \underbrace{G_1 \cup \cdots \cup G_r}_{\text{componentes}}$

Pela HI $e(G_i) \leq \frac{n_i}{2}(k-1)$, mas  ($n_i$: #vtxs de $G_i$)

$$e(G) = \sum_i e(G_i) \leq \sum_i \frac{n_i}{2}(k-1) = \frac{(k-1)}{2} \sum_i n_i = \frac{(k-1)}{2} \cdot n$$

Se $\delta(G) \geq \frac{k}{2}$, então pelo corolário, $P_k \subseteq G$.

Caso contrário, $G$ possui um vértice $x$ t.q. $d(x) \leq \frac{k-1}{2}$.

Seja $G' = G - x$. Note $G'$ é $P_k$-livre. Pela HI

$$e(G) \leq e(G') + d(x) \overset{HI}{\leq} \frac{(n-1)(k-1)}{2} + \frac{k-1}{2} = \frac{(k-1)}{2} \cdot n$$

∎

# SUPERSATURAÇÃO E ESTABILIDADE

- UMA VEZ QUE SABEMOS O NÚMERO EXTREMAL DE UM GRAFO $H$, SURGEM DUAS OUTRAS PERGUNTAS

a) O QUE PODEMOS DIZER SOBRE A ESTRUTURA DE UM GRAFO $H$-LIVRE COM $ex(n,H)-t$ ARESTAS?

↳ TEOREMAS DE ESTABILIDADE

b) QUANTAS CÓPIAS DE $H$ EXISTEM EM UM GRAFO COM $ex(n,H)+t$ ARESTAS?

↳ TEOREMAS DE SUPERSATURAÇÃO

**Teorema.** Sejam $n, t \in \mathbb{N}$ e $G$ um grafo livre de triângulos com $n$ vèrtices. Se

$$e(G) \geq \frac{n^2}{4} - t$$

então $G$ contém um subgrafo bipartido com pelo menos $e(G) - t$ arestas.

**Teorema** Sejam $n, t \in \mathbb{N}$ e $G$ um grafo com $n$ vèrtices. Se

$$e(G) \geq \frac{n^2}{4} + t$$

então $G$ contém pelo menos $\frac{t \cdot n}{3}$ triângulos.

**DEF:** Um grafo $G$ é t-longe de ser bipartido se

$$e(G') \leq e(G) - t$$

para todo subgrafo bipartido $G'$ de $G$.

**DEF:** Um grafo $G$ é t-próximo de ser bipartido se existe subgrafo bipartido $G'$ de $G$ t.q.

$$e(G') \geq e(G) - t$$

**Teorema.** Sejam $n, t \in \mathbb{N}$ e seja $G$ um grafo com $n$ vértices. Se $G$ é t-longe de ser bipartido, então há pelo menos

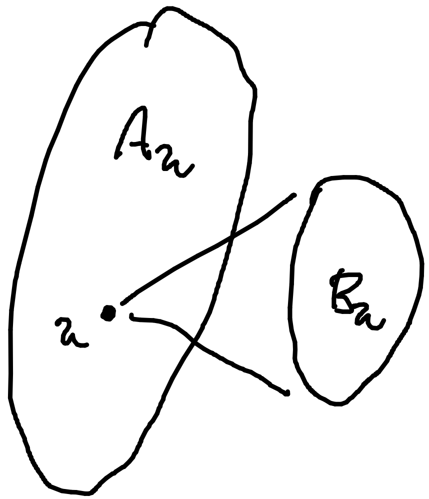
$$\frac{n}{6}\left(e(G) + t - \frac{n^2}{4}\right)$$

triângulos em $G$.

**Teorema.** Sejam $n, t \in \mathbb{N}$ e seja $G$ um grafo com $n$ vértices. Se $G$ é $t$-longe de ser bipartido, então há pelo menos

$$\frac{n}{6}\left(e(G)+t-\frac{n^2}{4}\right)$$

triângulos em $G$.




**Def:** Um grafo $G$ é $t$-longe de ser bipartido se

$$e(G') \leq e(G) - t$$

para todo subgrafo bipartido $G'$ de $G$.

**Prova:** Para cada vértice $u$ defina $B_u = N_G(u)$ e $A_u = V(G) \setminus B_u$

Note que

\# de arestas em $G[B_u]$

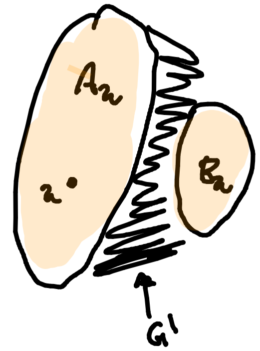
$$K_3(G) = \frac{1}{3} \sum_{u \in V(G)} e(B_u)$$

\# triângulos em $G$.

DEF: UM GRAFO $G$ É t-LONGE DE SER BIPARTIDO SE

$$e(G') \leq e(G) - t$$

PARA TODO SUBGRAFO BIPARTIDO $G'$ DE $G$.

$G =$ 


PROVA: PARA CADA VÉRTICE $u$ DEFINA $B_u = N_G(u)$ E $A_u = V(G) \setminus B_u$

NOTE QUE

$$K_3(G) = \frac{1}{3} \sum_{u \in V(G)} e(B_u)$$

$e(B_u)$: # DE ARESTAS EM $G[B_u]$

$K_3(G)$: # TRIÂNGULOS EM $G$.

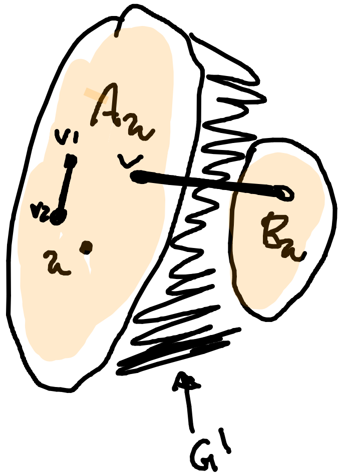
SEJA $G'$ O SUBGRAFO BIPARTIDO COM BIPARTIÇÃO $(A_u, B_u)$

COMO $G$ É t-LONGE DE SER BIPARTIDO, TEMOS

$$e(G') \leq e(G) - t \iff t \leq e(G) - e(G') = e(A_u) + e(B_u)$$

$e(G')$ ARESTAS QUE LIGAM $A_u$ E $B_u$

$$\sum_{v\in A_u} d(v) = 2e(A_u) + e(A_u, B_u)$$
$$= e(A_u) + e(A_u) + e(A_u, B_u)$$




Por outro lado, temos

$$e(G) = e(A_u) + e(A_u, B_u) + e(B_u)$$

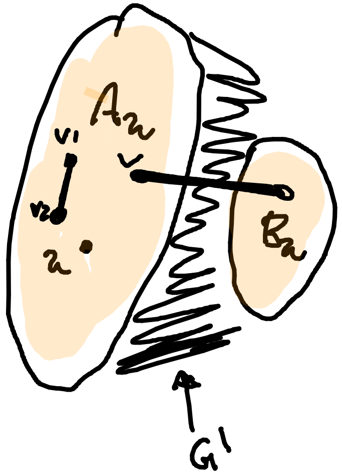
$$K_3(G) = \frac{1}{3}\sum_{u\in V(G)} e(B_u)$$

OBTEMOS $\sum_{v\in A_u} d(v) = e(A_u) + e(G) - e(B_u)$

OU SEJA $e(B_u) = e(G) + e(A_u) - \sum_{v\in A_u} d(v)$

$$t \leq e(A_u) + e(B_u) \iff e(B_u) \geq t - e(A_u)$$

$$2e(B_u) \geq e(G) + t - \sum_{v\in A_u} d(v)$$




$$2e(B_u) \geq e(G) + t - \sum_{v \in A_u} d(v)$$

$$K_3(G) = \frac{1}{3} \sum_{u \in V(G)} e(B_u)$$

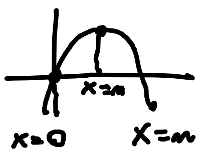
Temos $$K_3(G) \geq \frac{1}{6} \sum_{u \in V(G)} \left( e(G) + t - \sum_{v \in A_u} d(v) \right)$$

$$\geq \frac{n}{6} \left( e(G) + t - \frac{n^2}{4} \right)$$

$\square$

$$\sum_{u \in V(G)} \sum_{v \in A_u} d(v) = \left| \{ (u, v, w) : uv \notin E(G) \text{ e } vw \in E(G) \} \right|$$

$$= \sum_{v \in V(G)} d(v)\,(n - d(v)) \leq \sum_{v \in V(G)} \frac{n^2}{4} = \frac{n^3}{4}$$




$$x(n-x) = nx - x^2 \leq \frac{n^2}{4}$$