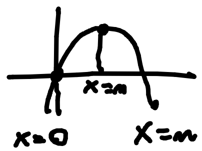
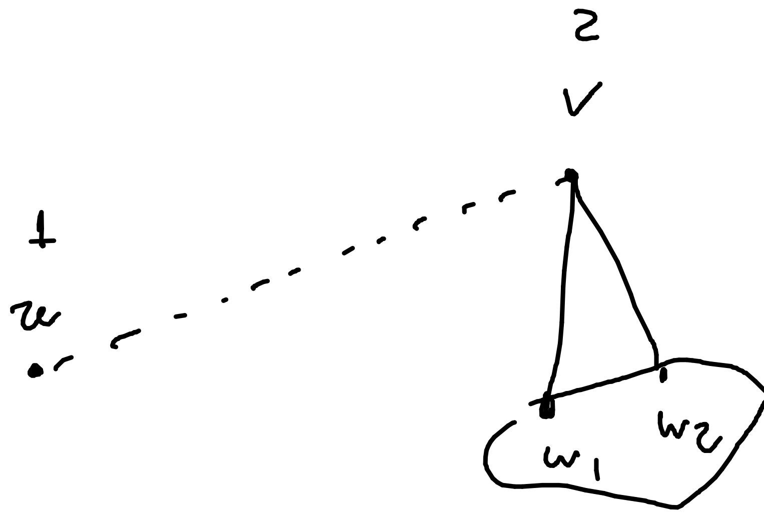
$$\sum_{u \in V(G)} \sum_{v \in A_u} d(v) = \left|\{(u,v,w) : uv \notin E(G) \text{ e } vw \in E(G)\}\right|$$

$$= \sum_{v \in V(G)} d(v)\,(n - d(v)) \leqslant \sum_{v \in V(G)} \frac{n^2}{4} = \frac{n^3}{4}$$

$\in A_u$



$$x(n-x) = nx - x^2 \leqslant \frac{n^2}{4}$$



$$T = \{(u, v, w) : uv \notin E(G) \text{ e } vw \in E(G)\}$$

OBS: FIXADO $u \in V$ T.q. $uv \notin E(G)$,
EXISTEM $d(v)$ VTXS w T.q. $(u,v,w) \in T$

OBS2: FIXADO u, EXISTEM $\sum_{v \in A_u} d(v)$ TRIPLAS $(u,v,w) \in T$

```
COUNT = 0
For u ∈ V(G):
    For v ∈ A_u:
        For w ∈ N(v):
            COUNT += 1
```

$$\sum_{u \in V(G)} \sum_{v \in A_u} d(v)$$

```
COUNT = 0
For v ∈ V(G):
    For u ∉ N(v):
        For w ∈ N(v):
            COUNT += 1
```

$$\{(u, v, w) : uv \notin E(G) \ \text{e} \ vw \in E(G)\}$$

$$\sum_{v \in V(G)} d(v)\,(n - d(v))$$

Teorema. Sejam $n, t \in \mathbb{N}$ e seja G um grafo com n vértices. Se G é t-longe de ser bipartido, então há pelo menos

$$\frac{n}{6}\left(e(G) + t - \frac{n^2}{4}\right)$$

triângulos em G.

$$e(G') \leq e(G) - (t+1)$$

Teorema. Sejam $n, t \in \mathbb{N}$ e G um grafo livre de triângulos com n vértices. Se

$$e(G) \geq \frac{n^2}{4} - t$$

então G contém um subgrafo bipartido com pelo menos $e(G) - t$ arestas.

Então G não é $(t+1)$-longe de ser bipartido

Então G é t-próximo de ser bipartido

Prova: Se G é $(t+1)$-longe de ser bipartido então pelo lema, G possui

$$\frac{n}{6}\left(e(G) + t + 1 - \frac{n^2}{4}\right) \geq \frac{n}{6}\left(\cancel{\frac{n^2}{4}} \cancel{-t} + \cancel{t} + 1 - \cancel{\frac{n^2}{4}}\right) = \frac{n}{6} > 1$$

$\blacksquare$

Teorema. Sejam $n, t \in \mathbb{N}$ e seja G um grafo com n vértices. Se G é t-longe de ser bipartido, então há pelo menos

$$\frac{n}{6}\left(e(G) + t - \frac{n^2}{4}\right)$$

triângulos em G.

Füredi

Teorema Sejam $n, t \in \mathbb{N}$ e G um grafo com n vértices. Se

$$e(G) \geq \frac{n^2}{4} + t$$

então G contém pelo menos $\frac{t \cdot n}{3}$ triângulos.

Prova: Como $e(G) \geq \frac{n^2}{4} + t$, pelo Teo. de Mantel G é t-longe de ser bipartido.

Logo, G possui

$$\frac{n}{6}\left(e(G) + t - \frac{n^2}{4}\right) \geq \frac{n}{6}\left(\frac{n^2}{4} + t + t - \frac{n^2}{4}\right) = \frac{2nt}{6} = \frac{nt}{3} \quad \blacksquare$$

TEOREMA: SEJAM $n, k \in \mathbb{N}$ E $t \geq 0$, E SEJA G UM GRAFO K_{k+1}-LIVRE COM n VÉRTICES. SE

$$e(G) \geq t_k(n) - t$$

ENTÃO G POSSUI UM SUBGRAFO k-PARTIDO COM PELO MENOS $e(G) - t$ ARESTAS.

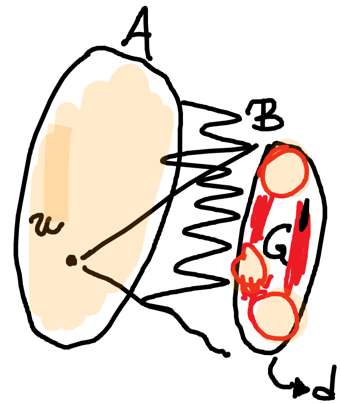
PROVA: INDUÇÃO EM k. O TEOREMA É TRIVIAL PARA $k = 1$. ENTÃO SUPOMOS QUE $k \geq 2$, E QUE O RESULTADO VALE PARA $k-1$.

SEJA G UM GRAFO K_{k+1}-LIVRE COM $e(G) \geq t_k(n) - t$ ARESTAS, E SEJA $u \in V(G)$ COM GRAU $\Delta(G) = d$.

PROVA: INDUÇÃO EM K. O TEOREMA É TRIVIAL PARA $K=1$.
ENTÃO SUPOMOS QUE $K \geq 2$, E QUE O RESULTADO VALE PARA $K-1$.

SEJA G UM GRAFO K_{K+1}-LIVRE COM $e(G) \geq t_K(n) - t$ ARESTAS,
E SEJA $u \in V(G)$ COM GRAU $\Delta(G) = d$.

SEJA $B = N(u)$ E $G' = G[B]$. NOTE QUE G' É K_K-LIVRE.
TEMOS $e(G') := t_{K-1}(d) - t'$, EM QUE $t' \geq 0$ PELO TEO. TURÁN.
PELA H.I., EXISTE $H' \subseteq G'$ $(K-1)$-PARTIDO T.Q. $e(H') \geq e(G') - t'$
SEJA H O GRAFO OBTIDO H' PELA ADIÇÃO DE $A = V(G) \setminus B$ E
AS ARESTAS LIGANDO VÉRTICES DE A A VÉRTICES DE B
TEMOS QUE MOSTRAR QUE $e(H) \geq e(G) - t$



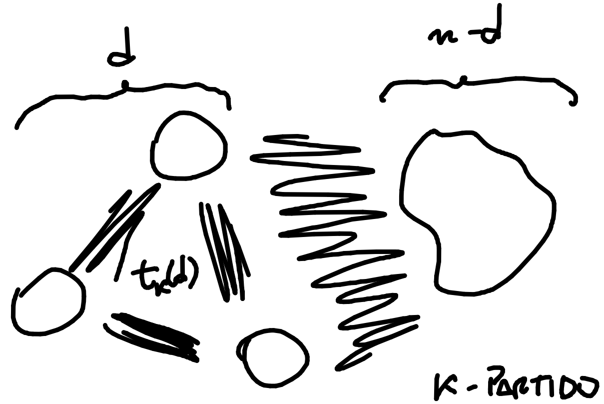
$$(1)\quad \begin{cases} e(G) = e(A) + e(A,B) + \overset{e(B)}{e(G')} \\[2ex] d(n-d) \geq \displaystyle\sum_{v\in A} d(v) = 2e(A) + e(A,B) \\ \qquad\qquad = e(A) + e(G) - e(G') \\ \qquad\qquad \geqslant e(A) + d(n-d) - t + t' \end{cases}$$

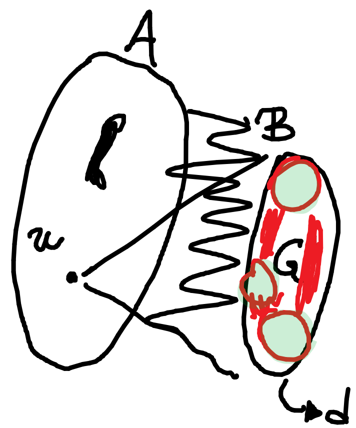
$$e(A) \leqslant t - t'$$

$$(4)\quad e(H) \geqslant e(G) - e(A) - t' \geqslant e(G) - t + \cancel{t'} - \cancel{t'}$$
$$= e(G) - t$$

$$(2)\quad t_{k-1}(d) + d\cdot(n-d) \leqslant t_k(n)$$

$$(3)\quad \left.\begin{array}{l} e(G) \geqslant t_k(n) - t \\ e(G') = t_{k-1}(d) - t' \end{array}\right]\ e(G) - e(G') \geqslant t_k(n) - t_{k-1}(d) - t + t'$$
$$\geqslant d(n-d) - t + t'$$





TEOREMA (ERDŐS - STONE, 1946). SEJA H UM GRAFO NÃO VAZIO. ENTÃO

$$ex(n, H) = \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} + o(1)\right)\frac{n^2}{2}$$

QUANDO $n \to \infty$

TEOREMA (ERDŐS - STONE, 1946). SEJA H UM GRAFO NÃO VAZIO. ENTÃO PARA TODO $\varepsilon > 0$, EXISTE $n_0 = n_0(\varepsilon, H)$ TAL QUE SE G É UM GRAFO COM $n \geq n_0$ VÉRTICES E

$$e(G) > \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} + \varepsilon\right)\frac{n^2}{2}$$

ENTÃO $H \subseteq G$.

ESTE NÚMERO EXTREMAL É JUSTO POIS $T_{\chi(H)-1}^{(n)}$ É H-livre