TEORIA DE RAMSEY

DEF: DADO UM GRAFO G, UMA K-COLORAÇÃO DE G É UMA FUNÇÃO

$K \in \mathbb{N}$

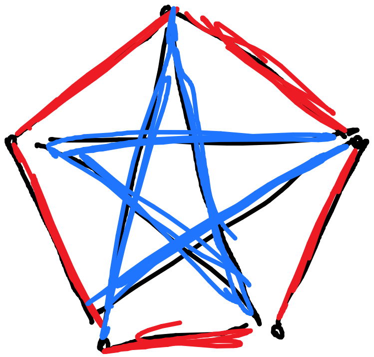
$$\chi : E(G) \rightarrow \{1, \dots, K\} = [K]$$

→ NO CASO DE 2-COLORAÇÕES AS CORES SERÃO VERMELHO E AZUL.

→ ESTAMOS INTERESSADOS NO CASO EM QUE $G = K_n$ PARA ALGUM n

OBS: PODEMOS ASSOCIAR TODA 2-COLORAÇÃO DE K_n A UM SUBGRAFO DE K_n. BASTA OLHAR PARA AS ARESTAS VERMELHAS.

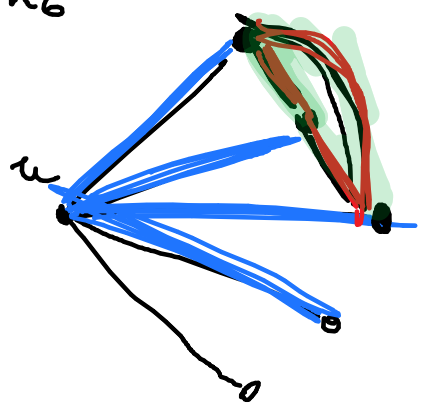
EX: É POSSÍVEL 2-COLORIR O K_5 SEM TRIÂNGULO MONOχ?



EX: É POSSÍVEL 2-COLORIR O K_6 SEM TRIÂNGULO MONOχ?

PROPOSIÇÃO: TODA 2-COLORAÇÃO DE K_6 POSSUI TRIÂNGULO MONO χ.

PROVA: SUPONHA QUE EXISTE 2-COLORAÇÃO χ DE K_6 SEM TRIÂNGULO MONOχ. FIXE VÉRTICE u.
PELO PCP, u É INCIDENTE A TRÊS ARESTAS DE UMA MESMA COR, DIGAMOS AZUL. SEJAM x, y, z OS "VIZINHOS AZUIS" DE u. SE HÁ ARESTA AZUL LIGANDO DOIS VÉRTICES EM $\{x, y, z\}$ ENTÃO HÁ TRIÂNGULO AZUL.
CASO CONTRÁRIO xyz É UM TRIÂNGULO VERMELHO. CONTRADIÇÃO ∎



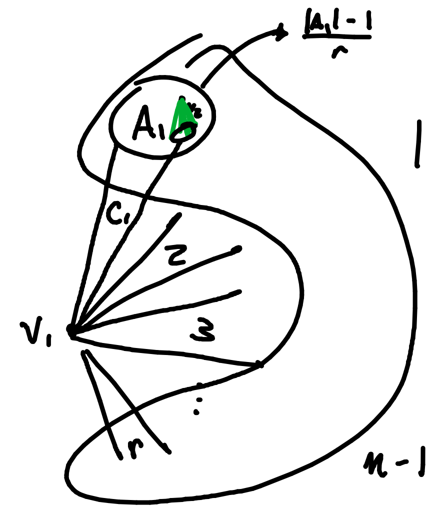
TEOREMA (RAMSEY): PARA TODO $r, k \in \mathbb{N}$, EXISTE $n \in \mathbb{N}$ TAL QUE TODA r-COLORAÇÃO DE K_n POSSUI CÓPIA MONOχ DE K_k.

PROVA: $A_0 = V(K_n)$ E FIXE $v_1 \in A_0$. PELO PCP v_1 É INCIDENTE A PELO MENOS $\frac{n-1}{r}$ ARESTAS DA COR c_1.

SEJA $A_1 = \{u \in A_0 : \chi(v_1 u) = c_1\}$

FIXE $v_2 \in A_1$. PELO PCP, v_2 É INCIDENTE A PELO MENOS $\frac{|A_1|-1}{r}$ ARESTAS DA COR c_2 LIGANDO A VÉRTICES DE A_1

SEJA $A_2 = \{u \in A_1 : \chi(v_2 u) = c_2\}$



$|A_1| \geq \frac{n-1}{r}$

REPETINDO ESTE PROCESSO OBTEMOS UMA SEQUÊNCIA DE VÉRTICES $v_1, \ldots, v_t$ E UMA SEQUÊNCIA DE CORES $c_1, \ldots, c_t$ E CONJUNTOS $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_t$

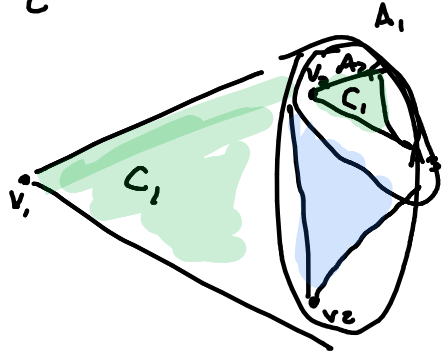
Repetindo este processo obtemos uma sequência de vértices $v_1, \dots, v_t$ e uma sequência de cores $c_1, \dots, c_t$ e conjuntos

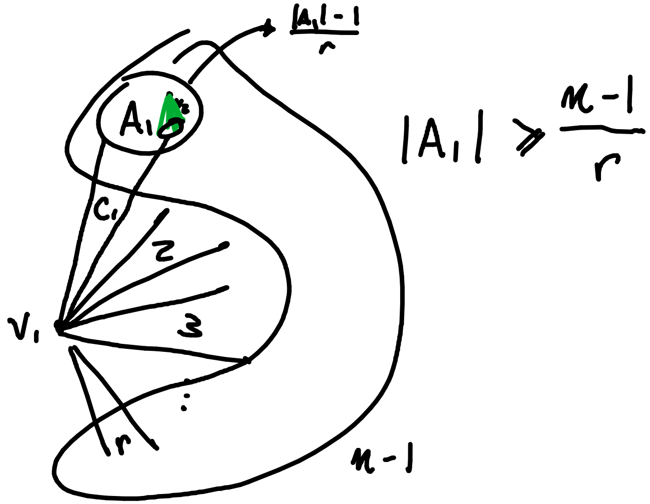
$$\underset{v_1}{A_0} \supseteq \underset{v_2}{A_1} \supseteq \underset{v_3}{A_2} \supseteq \dots \supseteq A_t$$

tais que

$$v_i \in A_{i-1}$$

$$\chi(v_i u) = c_i, \quad \forall u \in A_i \qquad i = 1, \dots, t$$





$|A_0| = n$

$|A_1| \approx \frac{n}{r}$

$|A_2| \approx \frac{n}{r^2}$

$|A_3| \approx \frac{n}{r^3}$

$\vdots$

$|A_t| \approx \frac{n}{r^t}$

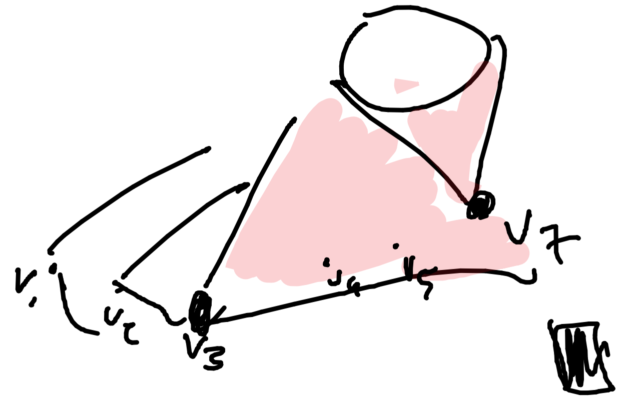
$n \geq r^t$

$n \geq r^{r(k-1)}$

Se n é suficientemente grande, temos

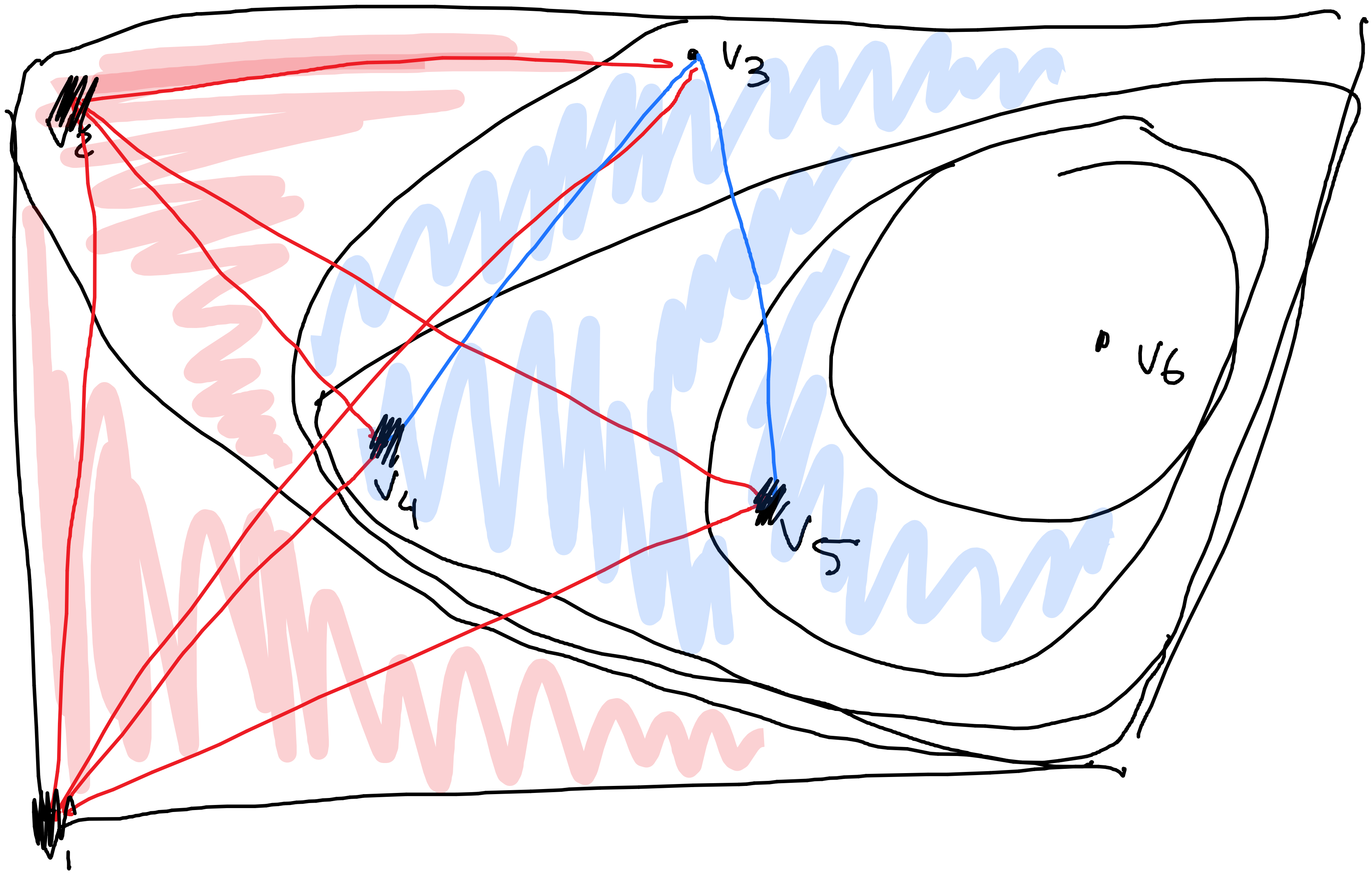
$$t > r(k-1).$$

Pelo PCP, existe cor c que aparece pelo menos k vezes em $c_1, \dots, c_t$. Seja $A = \{v_i : c_i = c\}$. Logo A é uma cópia de K_k da cor c.



$r = 2$ $\quad t > r(k-1) = 6$

$k = 4$



NÚMEROS DE RAMSEY

DEF: O NÚMERO DE RAMSEY $R(K)$ É O MENOR $n \in \mathbb{N}$ TAL QUE TODA 2-COLORAÇÃO DE K_n POSSUA CÓPIA MONO χ DE K_K.

OBS: $R(3) = 6$

DA PROVA DO TEOREMA DE RAMSEY PODEMOS EXTRAIR QUE $R(K) \leqslant 4^K$

TEOREMA (ERDŐS - SZEKERES). PARA TODO $K \geqslant 1$,

$$R(K) \leqslant \binom{2K-2}{K-1} \leqslant \frac{4^K}{\sqrt{K}}$$

DADOS GRAFOS G, H_1, H_2 ESCREVEMOS

$$G \to (H_1, H_2)$$

SE TODA 2-COLORAÇÃO DE G COM AS CORES VERMELHA E AZUL CONTÉM UMA CÓPIA VERMELHA DE H_1 OU UMA CÓPIA AZUL DE H_2.

PARA CADA $s, t \in \mathbb{N}$ DEFINA

$$R(s,t) = \min \{ n \in \mathbb{N} : K_n \to (K_s, K_t) \}$$

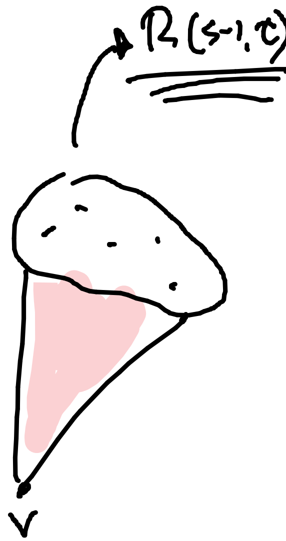
OBS: $R(k) = R(k,k)$

Lema: Para todos $s,t \geq 2$

$$R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1)$$

Prova: Seja $n = R(s-1,t) + R(s,t-1)$ e seja χ uma 2-col. de K_n, e seja $v \in V(K_n)$.

Pelo PCP, existem pelo menos $R(s-1,t)$ arestas vermelhas ou pelo menos $R(s,t-1)$ arestas azuis incidentes a v.



$$\left.\begin{array}{l} d_{verm.}(v) \leq \underline{R(s-1,t)-1} \\ d_{azul}(v) \leq R(s,t-1)-1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} n-1 = d(v) = d_{verm}(v) + d_{azul}(v) \\ \leq R(s-1,t) + R(s,t-1) - 2 \\ = n-2 < n-1 \end{array}$$

Suponha que existem pelo menos $R(s-1,t)$ arestas vermelhas em v

Seja $N_R(v) = \{ u \in V(K_n) : \chi(vu) = \text{vermelho} \}$.

Temos $|N_R(v)| \geq R(s-1,t)$. Pela definição de $R(s-1,t)$, SEJA $N_R(v) = \{u \in V(K_n) : \chi(vu) = \text{vermelho}\}$.

TEMOS $|N_R(v)| \geq R(s-1,t)$. PELA DEFINIÇÃO DE $R(s-1,t)$,

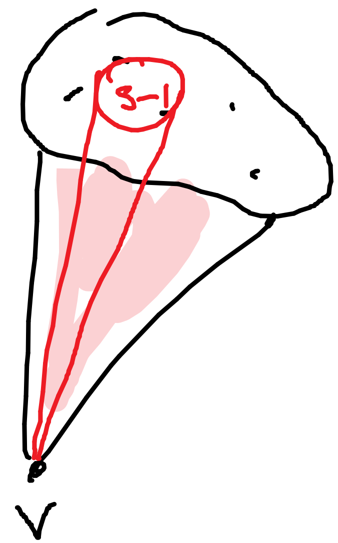
$N_R(v)$ CONTÉM (a) UM K_{s-1} VERMELHO; OU

(b) UM K_t AZUL.

NO CASO (b) K_n CONTÉM K_t AZUL, ACABOU

NO CASO (a), SEJA K A CÓPIA VERMELHA DE K_{s-1} EM $N_R(v)$ E $\{v\} \cup K$ É UMA CÓPIA VERMELHA DE K_s EM G.

$R(s-1,t)$



$\blacksquare$

Lema: Para todos $s,t \geq 2$

$$R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1)$$

Teorema (Erdős - Szekeres). Para todo $k \geq 1$,

$$R(k) \leq \binom{2k-2}{k-1} \leq \frac{4^k}{\sqrt{k}}$$

Teorema (Erdős - Szekeres). Para todos $s,t \geq 1$.

$$R(s,t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}$$

LEMA: PARA TODOS $s, t \geq 2$

$$R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1)$$

TEOREMA (ERDŐS - SZEKERES). PARA TODOS $s,t \geq 1$.

$$R(s,t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}$$

PROVA: NOTE QUE $R(s,1) = R(1,t) = 1$,

$$R(s,1) = 1 = \binom{s+1-2}{s-1}$$

OU SEJA, O RESULTADO VALE QUANDO $\min\{s,t\} = 1$.
ENTÃO SUPONHA QUE $\min\{s,t\} \geq 2$

PROVA: INDUÇÃO EM $s+t$.

NOTE QUE $R(s,1) = R(1,t) = 1$,

$$R(s,1) = 1 = \binom{s+1-2}{s-1}$$

OU SEJA, O RESULTADO VALE QUANDO $\min\{s,t\} = 1$.

ENTÃO SUPONHA QUE $\min\{s,t\} \geq 2$

PELA H.I., $R(s-1,t) \leq \binom{s+t-3}{s-2}$ E $R(s,t-1) \leq \binom{s+t-3}{s-1}$

PELO LEMA, TEMOS QUE

$$R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1) \leq \binom{s+t-3}{s-2} + \binom{s+t-3}{s-1}$$

$$= \binom{s+t-2}{s-1}$$

ISSO IMPLICA QUE

$$R(3,K) \leqslant \binom{K+1}{2}$$

TEOREMA (ERDŐS - SZEKERES). PARA TODOS $s,t \geqslant 1$.

$$R(s,t) \leqslant \binom{s+t-2}{s-1}$$

TEOREMA (ERDŐS). PARA TODO $K \geqslant 5$.

$$R(K) \geqslant 2^{K/2}$$