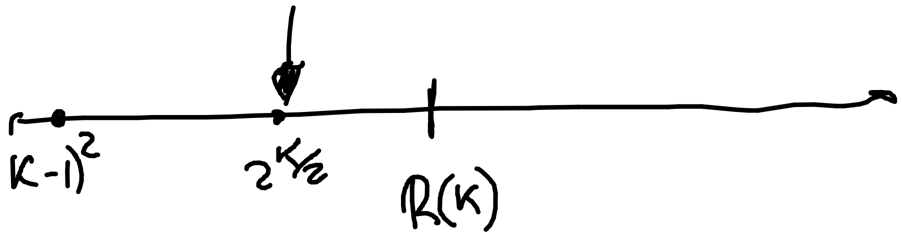
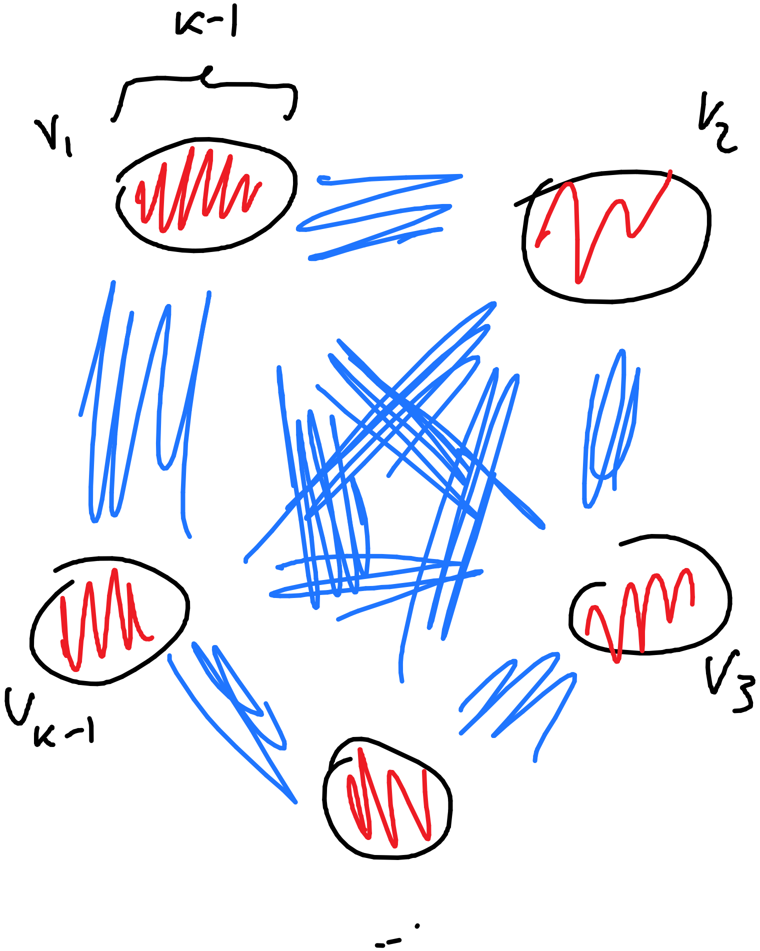
TEOREMA (ERDŐS). PARA TODO $K \geq 5$.

$$R(K) \geq 2^{K/2}$$



EX: $R(K) \geq (K-1)^2$



$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \leq |A| + |B|$

$\left|\bigcup_S A_S\right| \leq \sum_S |A_S|$

TEOREMA (ERDŐS). PARA TODO $K \geq 5$.

$$R(K) \geq 2^{K/2}$$

PROVA: SUPONHA QUE $n \leq 2^{K/2}$.

HÁ $2^{\binom{n}{2}}$ FORMAS DE COLORIR K_n COM DUAS CORES.

VAMOS CONTAR AS COLORAÇÕES "RUINS"

FIXE $S \subseteq V(K_n)$ COM K VÉRTICES. HÁ $2 \cdot 2^{\binom{n}{2} - \binom{K}{2}}$ FORMAS DE COLORIR K_n T.Q. S SEJA MONOχ.

$$\left|\{\text{colorações ruins}\}\right| \leq \left|\bigcup_{S \subseteq \binom{[n]}{K}} \{\text{colorações nas quais } S \text{ é mono}\chi\}\right|$$

$$\leq \sum_S \left|\{\text{colorações nas quais } S \text{ é mono}\chi\}\right|$$

$$= \binom{n}{K} 2^{\binom{n}{2} - \binom{K}{2} + 1} \leq 2^{\binom{n}{2}+1} \left(\frac{en}{K} \cdot 2^{-\frac{(K-1)}{2}} \right)^K$$

$$\binom{n}{K} \leq \left(\frac{en}{K}\right)^K$$

SUPONHA QUE $n \leqslant 2^{k/2}$.

$$\left|\{\text{colorações ruins}\}\right| \leqslant \left|\bigcup_{S \in \binom{[n]}{k}} \{\text{colorações nas quais } S \text{ é mono}\chi\}\right|$$

$$\binom{n}{k} \leqslant \left(\frac{en}{k}\right)^k$$

$$\leqslant \sum_{S} \left|\{\text{colorações nas quais } S \text{ é mono}\chi\}\right|$$

$$= \binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2} + 1} \leqslant 2^{\binom{n}{2}+1} \left(\frac{en}{k} \cdot 2^{-\frac{(k-1)}{2}}\right)^k$$

$$\leqslant 2^{\binom{n}{2}+1} \left(\frac{e}{k} \cdot 2^{\frac{k}{2} - \frac{(k-1)}{2}}\right)^k$$

$$= 2^{\binom{n}{2}+1} \underbrace{\left(\frac{e}{k} \cdot \overset{3,85}{\sqrt{2}}\right)^k}_{< \frac{1}{2} \text{ se } k \geqslant 5} < 2^{\binom{n}{2}}$$

LOGO, HÁ UMA COLORAÇÃO "BOA"

FRANKL E WILSON (1981)

SEJAM n UM INTEIRO POSITIVO E q UMA POTÊNCIA DE PRIMO T.Q.

$$n \geq q^2 - 1.$$

SEJA G O GRAFO COMPLETO COM $V(G) = \binom{[n]}{q^2-1}$ E CONSIDERE A COLORAÇÃO CUJA ARESTAS VERMELHAS SÃO

$$\{ST : |S \cap T| \equiv -1 \pmod q\}$$

É POSSÍVEL MOSTRAR QUE ESTA COLORAÇÃO NÃO POSSUI CLIQUE MONO χ COM MAIS QUE $K = \binom{n}{q-1}$ VÉRTICES.

Sah (2020)

$$R(k) \leq k^{-c \log k} \cdot 4^k$$

$$\frac{4^k}{\sqrt{k}}$$

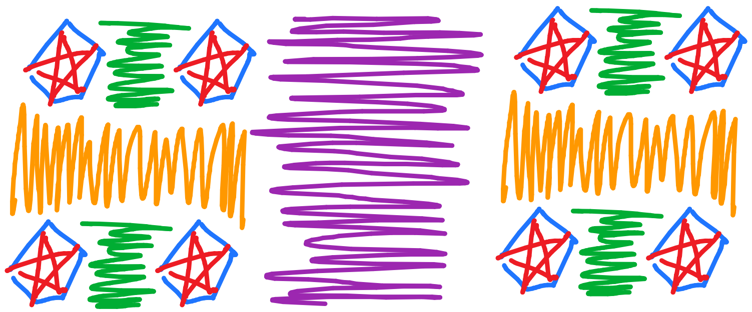
Def: O número de Ramsey para r cores, denotado por $R_r(K)$ é o menor n t.q. toda r-coloração de K_n possui cópia Monoχ de K_k.

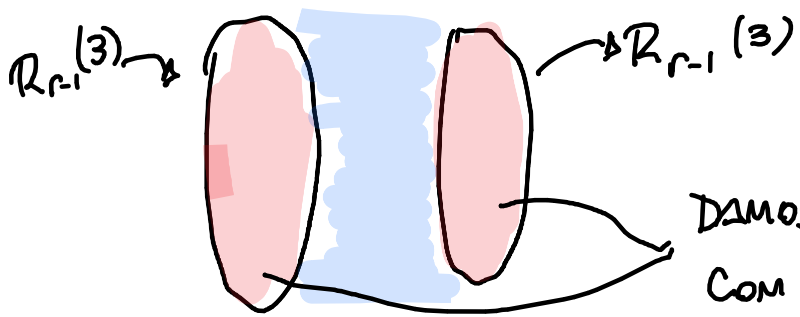
Teorema: Para todo $K \geq 2$

$$2^r \leq R_r(3) \leq 3 \cdot K!$$

Prova: Para o limitante inferior: $R_2(3) = R(3) = \underline{\underline{6}} \geq 2^2$ (caso base)

Seja $n = 2\left(R_{r-1}(3)-1\right) \geq 2 \cdot 2^{r-1} = 2^r$ e considere





Damos uma coloração com

Para o limitante superior: $R_r(3) \leqslant 3 \cdot k!$

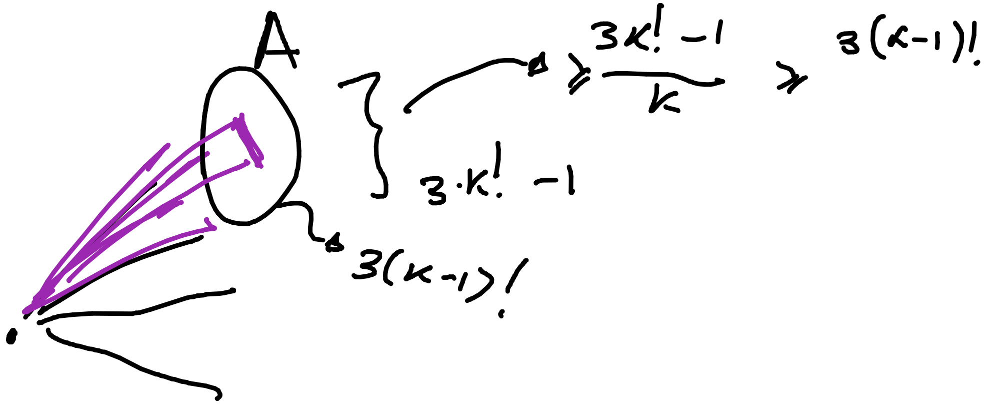
Indução em r:

Base: $R_2(3) = R(3) = 6 = 3 \cdot 2!$

Suponha que $R_{r-1}(3) \leqslant 3(k-1)!$

Seja $n = 3 \cdot k!$ e fixe uma r-coloração χ de K_n.

Fixe $v \in V(K_n)$. Certamente, v possui $3 \cdot (k-1)!$ arestas com uma mesma cor, digamos c



Seja $A = \{u \in V(K_n) : \chi(uv) = c\}$. Se há aresta xy em A com a cor c, então xyv é um K_3 monoχ com a cor c.

Caso contrário A é uma clique com $3(k-1)!$ vértices colorida com $r-1$ cores. Então, pelo HI, há triângulo monoχ em A.

Teorema: Para todo $K \geq 2$

$$2^{r} \leq R_r(3) \leq 3 \cdot K!$$

Problema. Existe $C > 0$ t.q.

$$R_r(3) \leq 2^{C \cdot r}$$

Para todo $r \in \mathbb{N}$.

TEORIA DE RAMSEY INFINITA

→ CONSIDERAR GRAFOS INFINITOS

→ $V(G) = \mathbb{N}$ E $E(G) = \binom{\mathbb{N}}{2}$

PCP: SE n POMBOS ESTÃO EM r CASAS, ENTÃO HÁ UMA CASA COM PELO MENOS $\left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil$ POMBOS.

PCP: SE HÁ UM NÚMERO INFINITO DE POMBOS DISTRIBUÍDOS EM r CASAS, ENTÃO HÁ UMA CASA COM UM NÚMERO INFINITO DE POMBOS.

TEOREMA: TODA r-COLORAÇÃO DE $\binom{\mathbb{N}}{2}$ CONTÉM UMA CLIQUE MONOχ INFINITA.

TEOREMA: TODA r-COLORAÇÃO DE $\binom{\mathbb{N}}{2}$ CONTÉM UMA CLIQUE MONOχ INFINITA.

PROVA: FIXE r-COLORAÇÃO χ DE $\binom{\mathbb{N}}{2}$

SEJA $A_0 = \mathbb{N}$ E $v_1 \in A_0$ UM VÉRTICE ARBITRÁRIO.

PELO PCP INFINITO EXISTE COR $c_1 \in [r]$ TAL QUE v_1 SEJA INCIDENTE A UM NÚMERO INFINITO DE ARESTAS DA COR c_1. SEJA

$$A_1 = \{u \in A_0 : \chi(uv_1) = c_1\}$$

ESCOLHA $v_2 \in A_1$.

PELO PCP INFINITO EXISTE COR $c_2 \in [r]$ TAL QUE v_2 SEJA INCIDENTE A UM NÚMERO INFINITO DE ARESTAS EM A_1 DA COR c_2. SEJA

$$A_2 = \{u \in A_1 : \chi(uv_1) = c_2\}$$

REPETINDO ESTE PROCEDIMENTO, OBTÊMOS SEQUÊNCIAS

$v_1, v_2, \ldots$ DE VÉRTICES; E

$c_1, c_2, \ldots$ DE CORES

E $\mathbb{N} = A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ E $v_i \in A_{i-1}$ E $\chi(v_i u) = c_i$

PARA TODO $u \in A_i$

Pelo PCP infinito HÁ COR c QUE OCORRE INFINITAS VEZES EM $c_1, c_2, \ldots$, E PORTANTO $A = \{v_i : c_i = c\}$ INDUZ UMA CLIQUE MONO χ INFINITA DA COR c EM G