TEORIA DE RAMSEY EM GRAFOS

ESCREVEMOS $G \to (H_1, H_2)$ SE TODA 2-COL. DE G POSSUI UM H_1 VERMELHO OU UM H_2 AZUL.

<u>DEF:</u> O NÚMERO DE RAMSEY DE H_1 VERSUS H_2 É DEFINIDOS

$$r(H_1, H_2) = \min \{ n \in \mathbb{N} : K_n \to (H_1, H_2) \}$$

OBSERVE QUE $r(H_1, H_2)$ EXISTE : SE $n \geq R(\underbrace{|H_1|}_{n_1}, \underbrace{|H_2|}_{n_2})$

$$K_n \to (K_{n_1}, K_{n_2})$$

O QUE FOI PROVADO NA LISTA É QUE SE n É TAL QUE

$$ex(n, H_1) + ex(n, H_2) < \binom{n}{2}$$

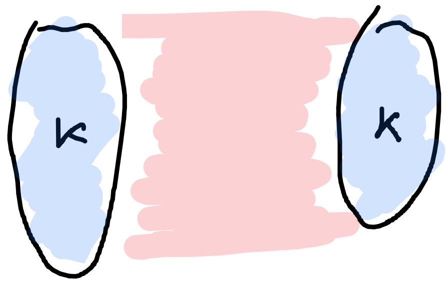
ENTÃO $K_n \to (H_1, H_2)$

ISSO IMPLICA QUE $r(H_1, H_2) \leq \min\left\{n : ex(n, H_1) + ex(n, H_2) < \binom{n}{2}\right\}$

P_K = CAMINHO COM K ARESTAS E K+1 VÉRTICES

<u>TEOREMA</u>: $r(K_3, P_K) = 2K+1$

<u>PROVA</u>: PARA PROVAR $r(K_3, P_K) > 2K$, USAMOS A SEGUINTE CONSTRUÇÃO



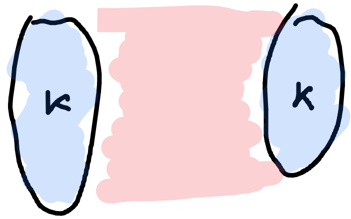
= COLORAÇÃO DE K_{2K} SEM K_3 VERMELHO E SEM P_K AZUL

SEJA $n = 2K+1$ E SEJA χ UMA 2-COL. DE $E(K_n)$.
SEJA P UM CAMINHO MAXIMAL AZUL, DIGAMOS QUE P TEM $t+1$ VÉRTICES, COM $t < K$

P_K = caminho com k arestas e $k+1$ vértices

Teorema: Para todo $k \in \mathbb{N}$, $r(K_3, P_k) = 2k+1$

Prova: Para provar $r(K_3, P_k) > 2k$, usamos a seguinte construção

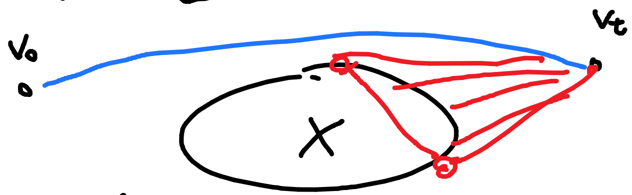


= coloração de K_{2k} sem K_3 vermelho e sem P_k azul

Seja $n = 2k+1$ e seja χ uma 2-col. de $E(K_n)$.

Seja P um caminho maximal azul, digamos que P tem $t+1$ vértices. Se $t \geq k$, $P \supseteq P_k$ e acabou.

Então podemos supor $t < k$



Seja $X = V(K_n) \setminus V(P)$. Note que $|X| = 2k+1 - (t+1) > k$

Além disso, toda aresta de v_t para X é vermelha

(1) Se há aresta xy vermelha em X. Então $v_t xy$ é cópia vermelha de K_3

(2) X é uma clique azul. Como $|X| > k$, então $P_k \subseteq X$. ∎

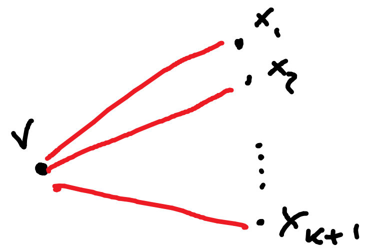
TEOREMA: SEJA $k \in \mathbb{N}$ E T UMA ÁRVORE COM $k+1$ VÉRTICES.

ENTÃO $r(K_3, T) = 2k+1$

PROVA: O LIMITANTE INFERIOR É IDÊNTICO AO LIMITANTE DE $r(K_3, P_k)$.

SEJA $n = 2k+1$ E SEJA $\mathcal{X}$ UMA 2-col. DE $E(K_n)$.

SE EXISTE VÉRTICE COM GRAU VERMELHO PELO MENOS $k+1$



ENTÃO $N(v)$ INDUZ CLIQUE AZUL, DO CONTRÁRIO HÁ K_3 VERMELHO

MAS ENTÃO $T \subseteq N_{azul}(v)$

ENTÃO PODEMOS SUPOR QUE $d_{verm.}(v) \leq k$ PARA TODO VTX. $v \in V(G)$

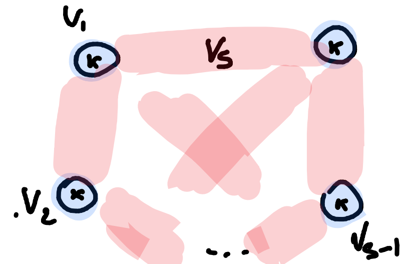
COMO $d_{azul}(v) + d_{verm}(v) = 2k$, TEMOS $d_{azul}(v) = 2k - d_{verm}(v) \geq k$.

PELO LEMA, HÁ CÓPIA DE T AZUL. ∎

Teorema: Sejam $k, s \in \mathbb{N}$ e seja T uma árvore com $k+1$ vértices. Então

$$r(K_{s+1}, T) = s \cdot k + 1$$

Prova: O limitante inferior é uma generalização dos limitantes anteriores: colorimos uma cópia de $T_s(sk)$ com vermelho e seu complemento com azul.



Indução em s. Se $s=2$, ok.

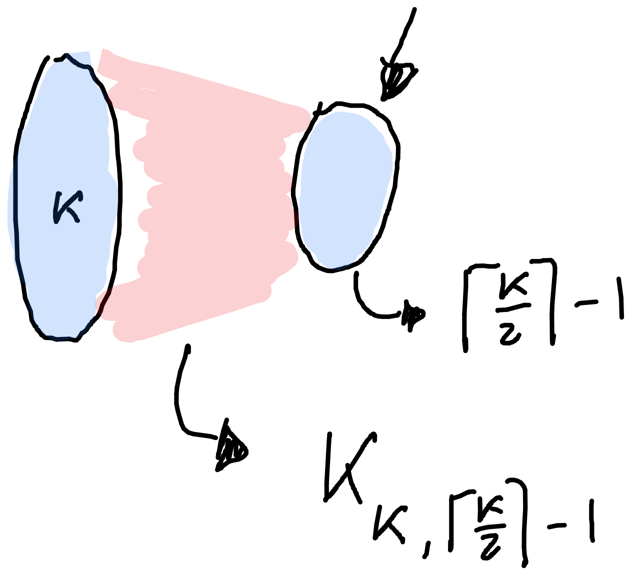
Seja $m = s \cdot k + 1$ e χ uma coloração de $E(K_m)$.

Suponha que existe v t.q. $d_{verm}(v) \geq (s-1)k+1$.
Pela H.I. a vizinhança vermelha de v possui $\overset{(a)}{K_s}$ verm. ou $\overset{(b)}{T}$ azul.
Caso (a), a cópia verm. de K_s com v é uma cópia verm. de K_{s+1}.
Caso (b), a cópia azul de T está em χ.
Então podemos supor $d_{verm}(v) \leq (s-1)k = sk - k$.
Logo $d_{azul}(v) = sk - d_{verm}(v) \geq k$ para todo vértice $v \in V(G)$.

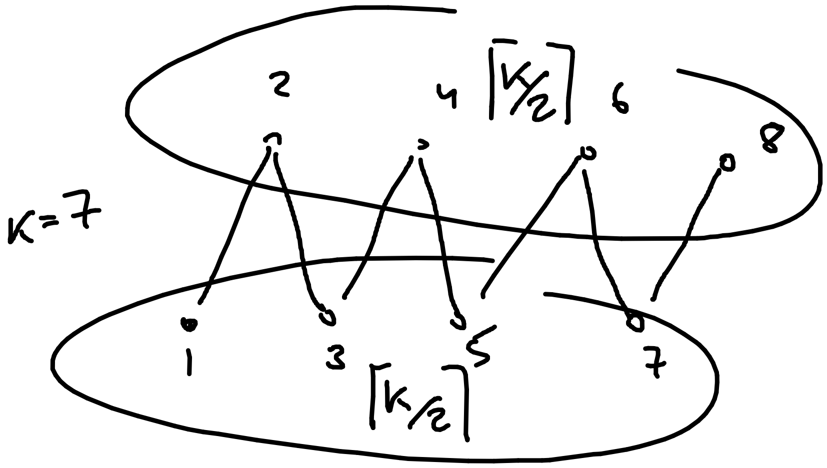
Pelo lema há cópia azul de T. ∎

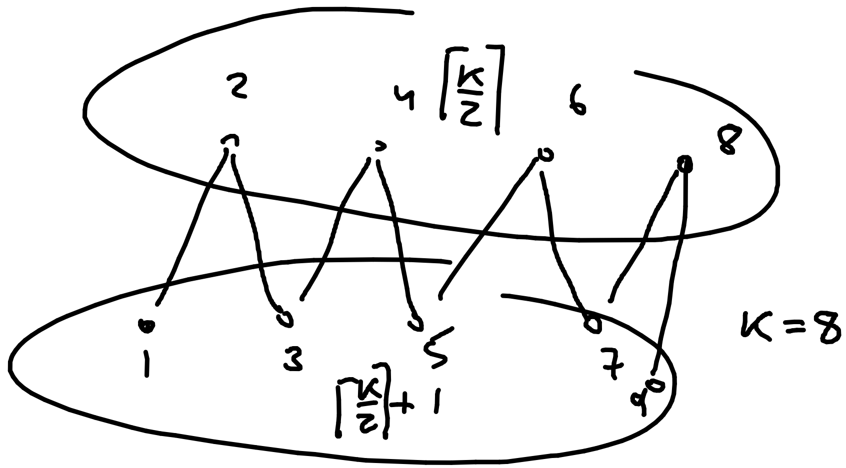
Teorema: Para todo $k \in \mathbb{N}$, temos $r(P_k, P_k) = \left\lceil \frac{3k}{2} \right\rceil$

Prova: Para o limitante inferior, defina $n = \left\lceil \frac{3k}{2} \right\rceil - 1$.



$$\left\lceil \frac{3k}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{k}{2} + k \right\rceil = \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil + k$$



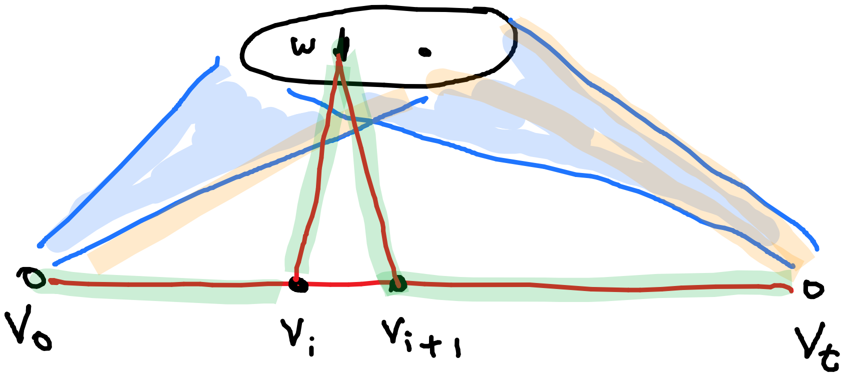


PARA O LIMITANTE SUPERIOR, VAMOS PROVAR ALGO MAIS FORTE, POR INDUÇÃO:

PROPOSIÇÃO:
SE $K \geq \ell \geq 1$ E $n \geq K + \lceil \frac{\ell}{2} \rceil$, ENTÃO $K_n \to (P_K, P_\ell)$

SE $\ell = 3$. SEJA P UM CAMINHO VERMELHO MAXIMAL

$n = K + 2$



$t < K$

ENTÃO PODEMOS SUPOR QUE $\ell \geq 4$

SEJA P UM CAMINHO VERMELHO MAXIMO