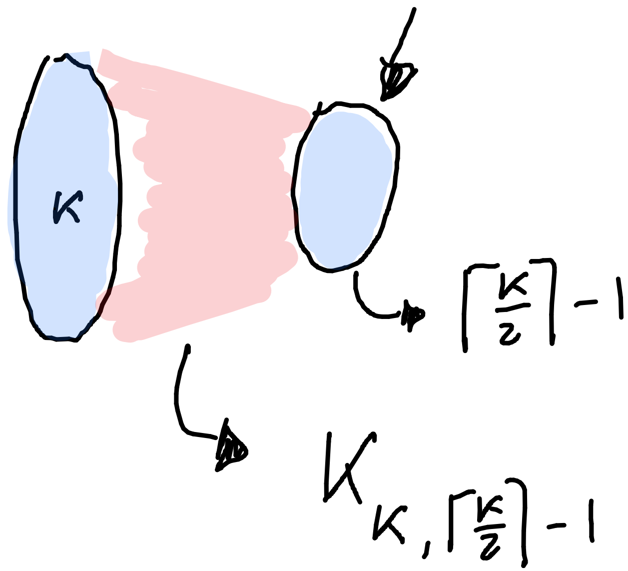
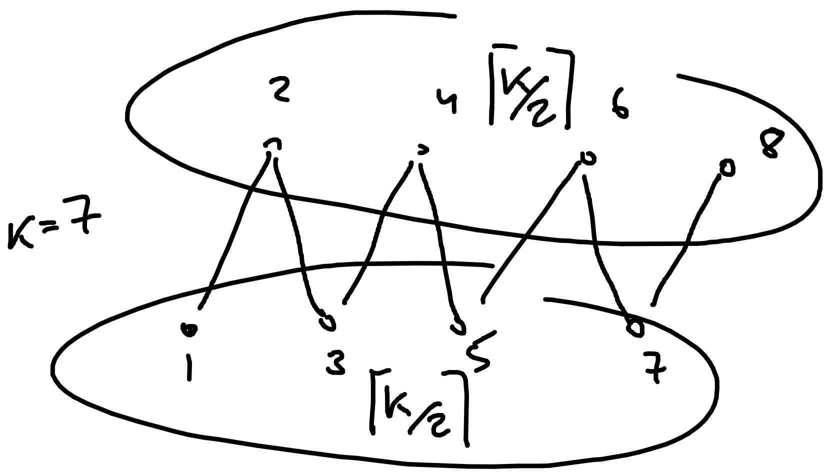
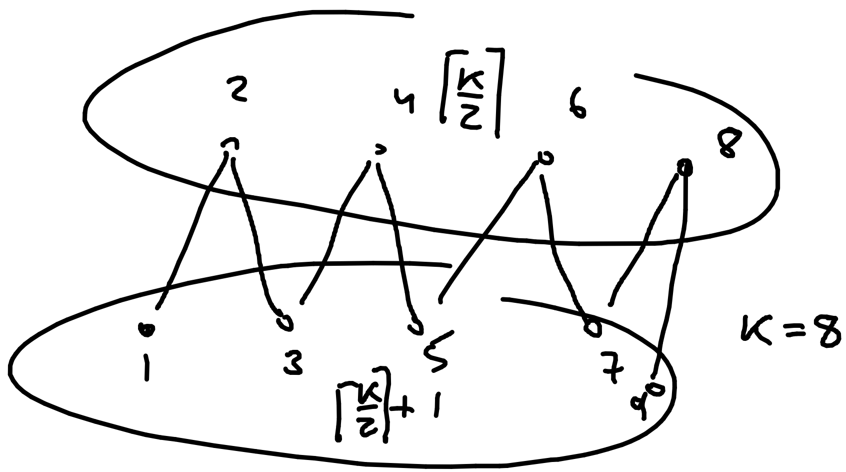
Teorema: Para todo $k \in \mathbb{N}$, temos $r(P_k, P_k) = \left\lceil \frac{3k}{2} \right\rceil$

Prova: Para o limitante inferior, defina $n = \left\lceil \frac{3k}{2} \right\rceil - 1$.



$$\left\lceil \frac{3k}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{k}{2} + k \right\rceil = \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil + k$$





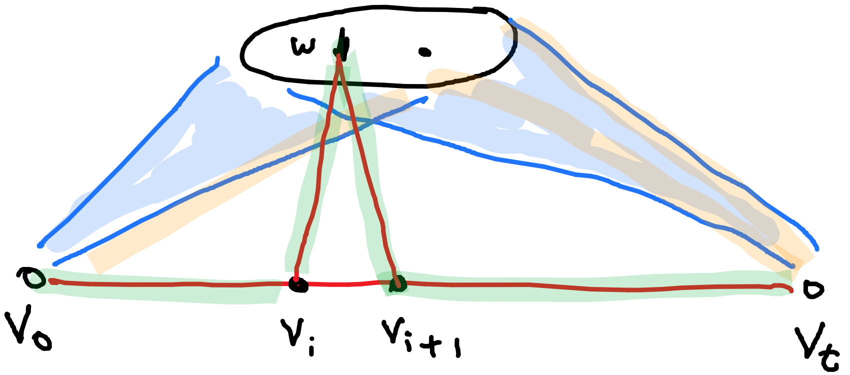
PARA O LIMITANTE SUPERIOR, VAMOS PROVAR ALGO MAIS FORTE, POR INDUÇÃO EM $k+\ell$.

PROPOSIÇÃO:

SE $K \geq \ell \geq 1$ E $n \geq K + \lceil \frac{\ell}{2} \rceil$, ENTÃO $K_n \to (P_K, P_\ell)$

SE $\ell = 3$. SEJA P UM CAMINHO VERMELHO MAXIMAL

$n = K+2$



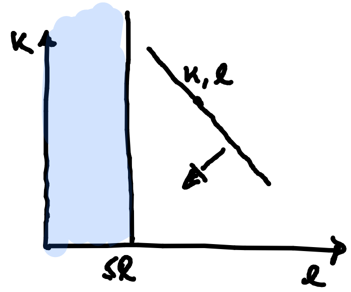
$t < K$

ENTÃO PODEMOS SUPOR QUE $K \geq \ell \geq 4$

SEJA P UM CAMINHO VERMELHO MÁXIMO

$K \geq \ell \geq 4$

$n = K + \lceil \frac{\ell}{2} \rceil$



SEJA χ UMA 2-COLORAÇÃO DE K_n, E SUPONHA QUE

H.I.: SE $k' + \ell' < k + \ell$, $n' \geq k' + \lceil \frac{\ell'}{2} \rceil$, E $K \geq \ell$

ENTÃO $K_{n'} \rightarrow (P_{k'}, P_{\ell'})$

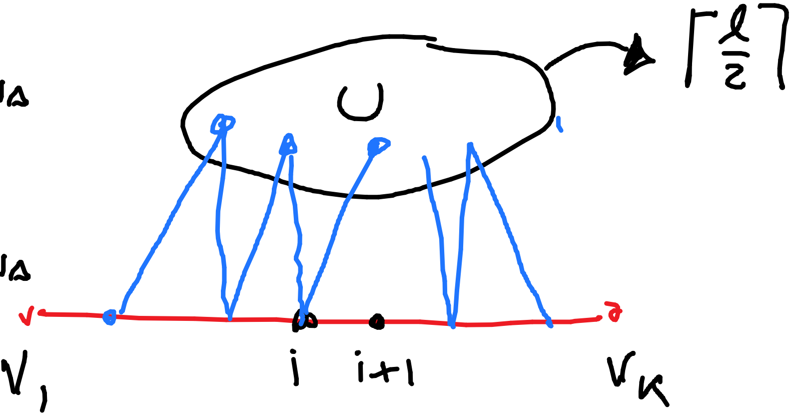
CASO 1: $K > \ell$.

NOTE QUE $n = K + \lceil \frac{\ell}{2} \rceil \geq \overbrace{(K-1)}^{k'} + \lceil \frac{\ell}{2} \rceil$, E $k' = K - 1 \geq \ell = \ell'$

PELA H.I. $K_n \rightarrow (P_{K-1}, P_\ell)$, LOGO HÁ P_{K-1} VERMELHO.

SEJA Q_1 UM CAMINHO AZUL ÍMPAR MÁXIMO QUE ALTERNA ENTRE U E $\{v_2, \dots, v_K\}$

SEJA Q_2 UM CAMINHO AZUL ÍMPAR MÁXIMO QUE ALTERNA ENTRE U E $\{v_2, \dots, v_K\}$ E VTX-DISJUNTO DE Q_1



CASO 1: $K > \ell$.

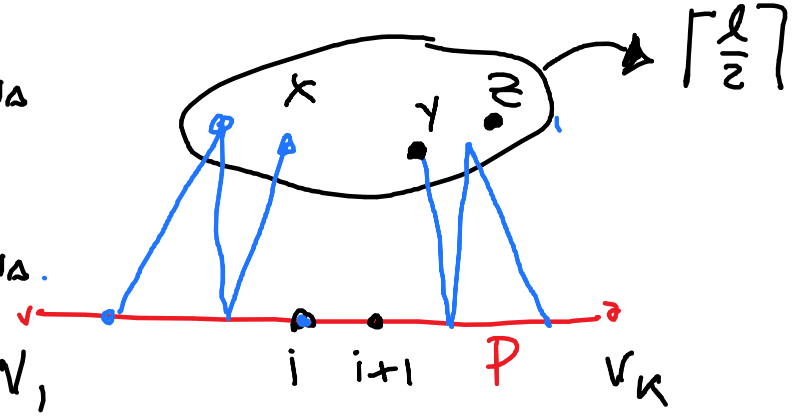
$$k' + \ell' < k+\ell$$

NOTE QUE $n = k + \lceil \frac{\ell}{2} \rceil \geq \overbrace{(k-1)}^{k'} + \lceil \frac{\ell}{2} \rceil$, e $k' = k-1 \geq \ell = \ell'$

PELA H.I. $K_n \to (P_{k-1}, P_\ell)$, LOGO HÁ P_{k-1} VERMELHO.

SEJA Q_1 UM CAMINHO AZUL ÍMPAR MÁXIMO QUE ALTERNA ENTRE U e $\{v_2, \dots, v_k\}$

SEJA Q_2 UM CAMINHO AZUL ÍMPAR MÁXIMO QUE ALTERNA ENTRE U e $\{v_2, \dots, v_k\}$ e VTX-DISJUNTO DE Q_1



SE $Q_1 \cup Q_2 \supseteq U$, ENTÃO O CAMINHO OBTIDO DE $Q_1 \cup Q_2$ PELA ADIÇÃO DE $v_i x$ e $v_i y$ É UMA CÓPIA AZUL DE P_ℓ.

OBS: $v_k \in Q_1$

$Q_1 \cup Q_2$ TEM NO MÁX $\underset{\lceil \frac{\ell}{2} \rceil}{|U|} - 1 < \frac{k-1}{2}$ DE VÉRTICES EM P,

O Problema do Final Feliz

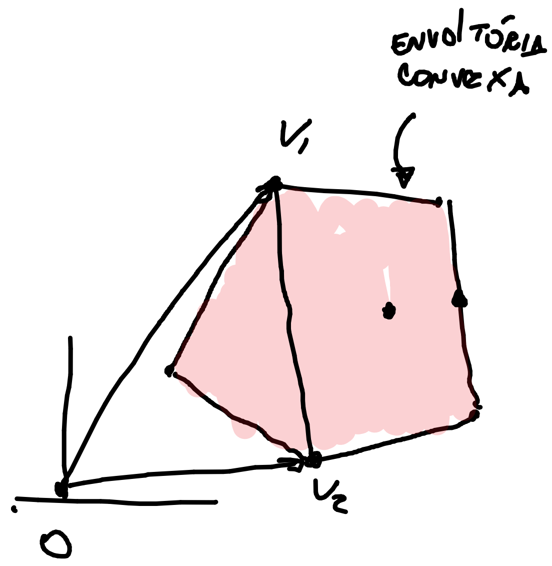
→ Pontos no plano

Dizemos que um conjunto P (finito) de pontos no plano está **em posição convexa** se todos os pontos são os vértices de um polígono convexo.

→ Combinação linear: $V = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_m v_m$

→ Combinação convexa: $V = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_m v_m$

$$c_1 + \cdots + c_m = 1$$



Esther Klein

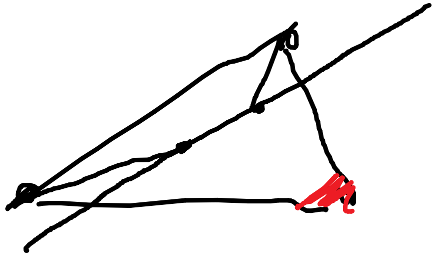
Problema: Existe $n(k)$ tal que qualquer conjunto com $n(k)$ pontos do plano t.q. quaisquer três pontos não são colineares contém k pontos em posição convexa?

FATO: QUALQUER CONJUNTO DE 5 PONTOS DO PLANO TAIS QUE TRÊS PONTOS NÃO SÃO COLINEARES CONTÉM 4 PONTOS EM POSIÇÃO CONVEXA

PROVA:

UM GRAFO $G \subseteq \binom{[n]}{2}$

$\mathcal{H} \subseteq \binom{[n]}{s}$



SUBCONJS COM s ELEMENTOS

DEF: DADA UMA r-COLORAÇÃO DOS s-SUBCONJUNTOS DE $[n]$

$$\chi : \binom{[n]}{s} \longrightarrow [r]$$

DIZEMOS QUE $A \subseteq [n]$ É MONO χ SE χ É CONSTANTE EM $\binom{A}{s}$.