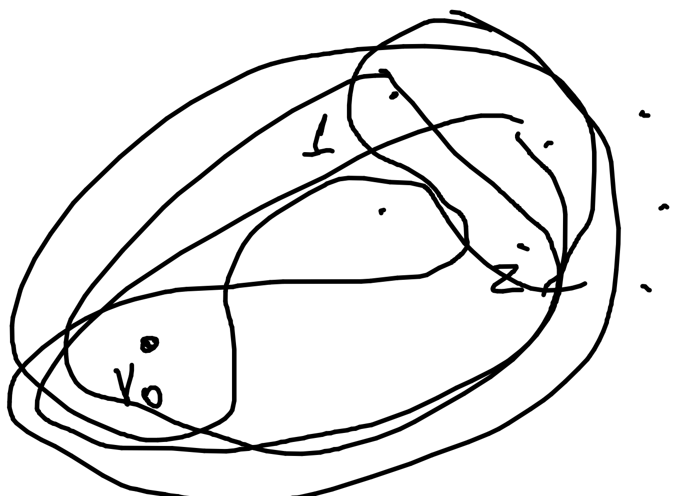
SUBCONJS COM s ELEMENTOS

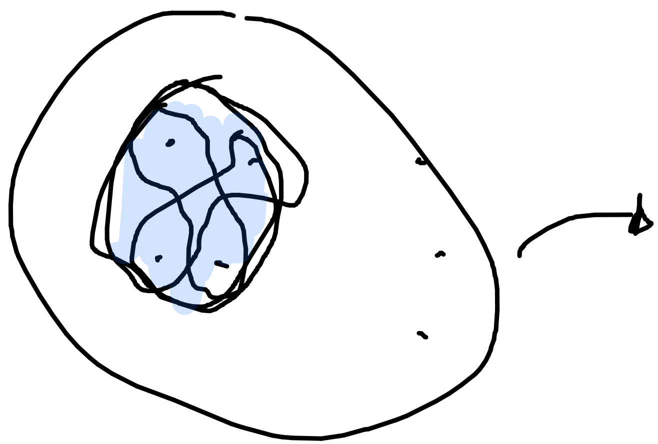
DEF: DADA UMA r-COLORAÇÃO DOS s-SUBCONJUNTOS DE $[n]$

$$\chi : \binom{[n]}{s} \longrightarrow [r]$$

DIZEMOS QUE $A \subseteq [n]$ É MONO χ SE χ É CONSTANTE EM $\binom{A}{s}$.

TEOREMA: PARA TODO $k, r, s \in \mathbb{N}$, EXISTE $n \in \mathbb{N}$ TAL QUE VALE O SEGUINTE. TODA r-COLORAÇÃO DOS s-SUBCONJUNTOS DE $[n]$ CONTÉM UM CONJUNTO MONO χ DE TAMANHO k.





$\underline{s=4}$

3 –

TEOREMA: PARA TODO $k, r, s \in \mathbb{N}$, EXISTE $n \in \mathbb{N}$ TAL QUE VALE O SEGUINTE. TODA r-COLORAÇÃO DOS s-SUBCONJUNTOS DE $[n]$ CONTÉM UM CONJUNTO MONOχ DE TAMANHO k.

TEOREMA: DADO k, EXISTE $n = n(k) \in \mathbb{N}$ TAL QUE QUALQUER CONJUNTO DE n PONTOS NO PLANO EM QUE QUAISQUER TRÊS PONTOS SÃO NÃO-COLINEARES, CONTÉM UM SUBCONJUNTO DE k PONTOS EM POSIÇÃO CONVEXA.

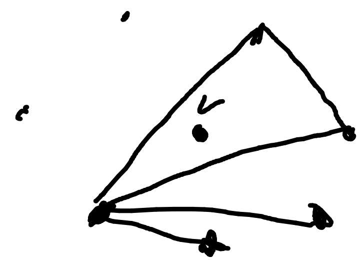
PROVA: DADO UM CONJUNTO A DE n PONTOS COMO ACIMA, DEFINIMOS UMA 2-COLORAÇÃO χ DOS 4-SUBCONJUNTOS DE A DA SEGUINTE FORMA: SE $\binom{A}{4}$, $\chi(S)$ É VERMELHO SE E SOMENTE SE OS PONTOS DE S ESTÃO EM POSIÇÃO CONVEXA

PROVA: DADO UM CONJUNTO A DE n PONTOS COMO ACIMA, DEFINIMOS UMA 2-COLORAÇÃO χ DOS 4-SUBCONJUNTOS DE A DA SEGUINTE FORMA: SE $\binom{A}{4}$, $\chi(S)$ É VERMELHO SE E SOMENTE SE OS PONTOS DE S ESTÃO EM POSIÇÃO CONVEXA. PELO TEOREMA DE RAMSEY P/ 4-SUBCONJUNTOS, EXISTE UM SUBCONJUNTO MONOχ B DE TAMANHO K.

COMO $K \geq 5$, PELO FATO, HÁ UM 4-SUBCONJUNTO C DE B EM POSIÇÃO CONVEXA, ENTÃO $\chi(C)$ É VERMELHO. ENTÃO B É MONOχ VERMELHO.

SUPONHA QUE B NÃO SEJA CONVEXO.

ENTÃO HÁ UM VÉRTICE V NO INTERIOR, E ESTE VÉRTICE ESTÁ NO INTERIOR DE UM TRIÂNGULO COM VÉRTICES EM B.



ESTES VÉRTICES NÃO ESTÃO EM POSIÇÃO CONVEXA, LOGO FORMAM UM 4-SUBCONJUNTO AZUL.

■

TEOREMA: QUALQUER SEQUÊNCIA DE K^2+1 NÚMEROS REAIS CONTÉM UMA SUBSEQUÊNCIA MONÓTONA DE COMPRIMENTO $K+1$.
↳ NÃO CRESCENTE OU NÃO DECRESCENTE

PROVA: SEJA $m = K^2+1$ E SEJA $a_1, \dots, a_m$ UMA SEQ. DE REAIS. PARA CADA $i = 1, \dots, m$ SEJA x_i O COMPRIMENTO DA MAIOR SUBSEQ. CRESCENTE QUE TERMINA EM a_i. SEJA y_i O COMPRIMENTO DA MAIOR SUBSEQ. DECRESCENTE QUE TERMINA EM a_i.

AF: $(x_i, y_i) \neq (x_j, y_j)$ SE $i \neq j$. DE FATO, SUPONHA QUE $i < j$ E $a_i \leq a_j$, ENTÃO $x_i < x_j$, POIS PODEMOS ESTENDER A SEQ. NÃO DECRESCENTE x_i ELTS TERMINANDO EM a_i ADICIONANDO a_j. ANALOGAMENTE, SE $a_i \geq a_j$, ENTÃO $y_i < y_j$.

SE NÃO HÁ SEQ. MONÓTONA DE TAM. K, ENTÃO $1 \leq x_i, y_i \leq K$, E HÁ K^2 PARES POSSÍVEIS, MAS TEMOS K^2+1 PARES DIFERENTES, CONTRADIÇÃO. $\blacksquare$

$K = 3$

1	100	-100	50	-50	200	199	198	-101
(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)	(2,3)	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(1,3)

-100 -50 1 50

3 2

3 3

1 3

Método Probabilístico

\mathbb

Um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathbb{P})$ em que Ω é um conjunto finito e $\mathbb{P} : \Omega \to [0,1]$ é uma função tal que $\displaystyle\sum_{x \in \Omega} \mathbb{P}(x) = 1$.

Dizemos que Ω é o espaço amostral e $\mathbb{P}$ é a função massa de probabilidade ou distribuição do espaço.

Os subconjuntos de Ω são chamados de eventos.

Para cada evento $A \subseteq \Omega$, a probabilidade de A é definida por

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(x)$$

Obs: $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

PROPOSIÇÃO:

1. PARA TODO $A \subseteq \Omega$, TEMOS $\mathbb{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathbb{P}(A)$

$$1 = \sum_{x \in \Omega} \mathbb{P}(x) = \underbrace{\sum_{x \in A} \mathbb{P}(x)}_{\mathbb{P}(A)} + \underbrace{\sum_{x \in \bar{A}} \mathbb{P}(x)}_{\mathbb{P}(\bar{A})}$$

2. (MONOTONICIDADE) PARA TODOS $A \subseteq B \subseteq \Omega$, TEMOS

$$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$$

3. (INCLUSÃO-EXCLUSÃO) PARA TODOS $A, B \subseteq \Omega$, TEMOS

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

4. (COTA DA UNIÃO) PARA TODOS $A_1, \ldots, A_k \subseteq \Omega$, TEMOS

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A_i)$$