DEF: UMA DISTRIBUIÇÃO $\mathbb{P}$ É UNIFORME SOBRE Ω SE PARA TODO $\omega \in \Omega$ TEMOS $\mathbb{P}(\omega) = 1/|\Omega|$.

ASSIM, $\mathbb{P}(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$ PARA TODO EVENTO $A \subseteq \Omega$.

→ UM ELEMENTO É ESCOLHIDO UNIFORMEMENTE OU AO ACASO

EX: DADO COMUM. $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. $\mathbb{P}$ É UNIFORME: $\mathbb{P}(\omega) = 1/6 \ \forall \omega$

SE $A = \{1,3,5\}$, ENTÃO $\mathbb{P}(A) = 1/2$.

SE B É O EVENTO EM QUE SAI UM NÚMERO PRIMO:

$$\mathbb{P}(B) = 1/2$$

A PROBABILIDADE DE SAIR UM PRIMO ÍMPAR

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 1/3$$

DEF: DIZEMOS QUE DOIS EVENTOS A E B SÃO INDEPENDENTES SE $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

→ NO EXEMPLO ANTERIOR: $\mathbb{P}(A) = 1/2$, $\mathbb{P}(B) = 1/2$, MAS

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 1/3 \neq \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

LOGO, A E B NÃO SÃO INDEPENDENTES.

DEF: DIZEMOS QUE OS EVENTOS $A_1, \dots, A_n$, COM $n \geq 2$, SÃO DOIS-A-DOIS INDEPENDENTES SE A_i E A_j FOREM INDEPENDENTES PARA TODO $i \neq j$, E QUE $A_1, \dots, A_n$ SÃO MUTUAMENTE INDEPENDENTES SE PARA TODA SUBCOLEÇÃO DE EVENTOS $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$, COM $k \leq n$ E $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n$ TEMOS

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{k} \mathbb{P}(A_{i_j})$$

EX: LANÇAR UMA MOEDA DUAS VEZES

$$\Omega = \{CC, CK, KC, KK\}$$

CONSIDERE OS EVENTOS

$$X = \{CC, CK\}, \quad Y \{CC, KC\}, \quad Z = \{CC, KK\}$$

TEMOS $\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(Y) = \mathbb{P}(Z) = 1/2$

ALÉM DISSO,

$$\mathbb{P}(X \cap Y) = \mathbb{P}(X \cap Z) = \mathbb{P}(Y \cap Z) = 1/4$$

MAS,

$$\mathbb{P}(X \cap Y \cap Z) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \mathbb{P}(X) \cdot \mathbb{P}(Y) \cdot \mathbb{P}(Z)$$

ENTÃO X, Y, Z SÃO DOIS-A-DOIS IND., MAS NÃO SÃO MUTUAMENTE INDEPENDENTES.

PROVA PROBABILÍSTICA

→ SE UM EVENTO OCORRE COM PROBABILIDADE POSITIVA, ENTÃO ELE É NÃO-VAZIO.

TEOREMA (ERDŐS, 1947): PARA TODO $K \geq 3$, TEMOS $R(K) > 2^{K/2}$.

PROVA: SEJA $n = 2^{K/2}$. CONSIDERE UMA 2-COLORAÇÃO ALEATÓRIA DE $E(G)$, COM $G = K_n$.

PARA CADA CLIQUE $A \subseteq V(G)$ COM K, A PROBABILIDADE DE A SER MONO χ $2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{K}{2}} = 2^{1-\binom{K}{2}}$

→ $E_A = \{A \text{ é mono}\chi\} \Rightarrow \mathbb{P}(E_A) = 2^{1-\binom{K}{2}}$.

→ $E^* = \{\text{colorações t.q. } \exists A \in \binom{V(G)}{K} \text{ mono}\chi\} = \bigcup_{A \in \binom{V(G)}{K}} E_A$

⇒ PELA COTA DA UNIÃO.

TEOREMA (ERDŐS, 1947): PARA TODO $k \geq 3$, TEMOS $R(k) > 2^{k/2}$.

PROVA: SEJA $n = 2^{k/2}$. CONSIDERE UMA 2-COLORAÇÃO ALEATÓRIA DE $E(G)$, COM $G = K_n$.

PARA CADA CLIQUE $A \subseteq V(G)$ COM k, A PROBABILIDADE DE A SER MONOχ $2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}} = 2^{1-\binom{k}{2}}$

$\rightarrow E_A = \{A \text{ é MONO}\chi\} \Rightarrow \mathbb{P}(E_A) = 2^{1-\binom{k}{2}}$.

$\rightarrow E^* = \{\text{COLORAÇÕES t.q. } \exists A \in \binom{V(G)}{k} \text{ MONO}\chi\} = \bigcup_{A \in \binom{V(G)}{k}} E_A$

$\Rightarrow$ PELA COTA DA UNIÃO.

$$\mathbb{P}(E^*) = \mathbb{P}\left(\bigcup E_A\right) \leq \sum \mathbb{P}(E_A) = \binom{n}{k} \cdot 2^{1-\binom{k}{2}} \rightarrow \frac{k^2-k}{2}$$

$$\leq \frac{n^k}{k!} \cdot 2^{1-\binom{k}{2}} = \frac{2^{k \cdot \frac{k}{2}}}{k!} \cdot 2^{1-\frac{k(k-1)}{2}} = \frac{2^{1+\frac{k}{2}}}{k!} < 1$$

∎

DEF: UM HIPERGRAFO K-UNIFORME $\mathcal{H}$ É UM PAR (V, E) EM QUE

$$E = E(\mathcal{H}) \subseteq \binom{V}{K}$$

↳ ARESTAS

↳ SUBCONJUNTOS DE V COM EXATAMENTE K ELEMENTOS

→ DIZEMOS QUE $\mathcal{H}$ É BICOLORÍVEL SE HÁ UMA 2-COLORAÇÃO DE V TAL QUE NENHUMA ARESTA $A \in E(\mathcal{H})$ É MONOχ.

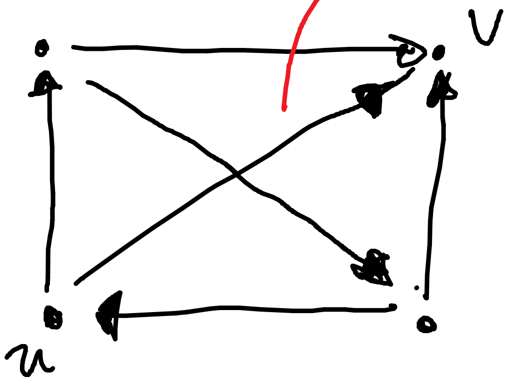
↳ TODA ARESTA POSSUI PELO MENOS UM VÉRTICE DE CADA COR.

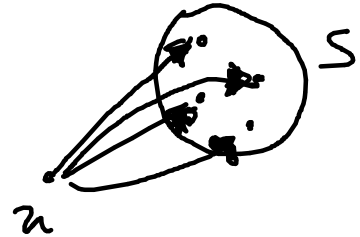
TEOREMA (ERDŐS, 1963): SEJA $\mathcal{H}$ UM HIPERGRAFO K UNIFORME COM m ARESTAS. SE $m < 2^{K-1}$, ENTÃO $\mathcal{H}$ É BICOLORÍVEL.

PROVA: PINTE CADA VÉRTICE DE AZUL OU VERMELHO DE FORMA ALEATÓRIA INDEPENDENTE E COM PROBABILIDADE $1/2$. A PROB. DE UMA ARESTA A SER MONOχ É 2^{1-K}. LOGO, (PELA COTA DA UNIÃO), A PROB. DE $\mathcal{H}$ TER UMA ARESTA MONOχ É $m \cdot 2^{1-K} = \frac{m}{2^{K-1}} < 1$. $\blacksquare$

DEF: UM TORNEIO T É UMA ESTRUTURA COMPOSTA POR UM CONJ. DE VÉRTICES $V(T)$ E UM CONJUNTO $E(T)$ DE PARES ORDENADOS T.q. PARA TODOS $u, v \in V(T)$ EXATAMENTE UM DENTRE (u,v) OU (v,u) ESTÁ EM $E(T)$.

$(u,v) = u$ "GANHA" DE v.





DEF: DADO UM CONJUNTO $S \subseteq V(T)$ E $u \in V(T) \setminus S$, ESCREVEMOS $u \to S$ SE $(u,v) \in E(T)$ PARA TODO $v \in S$. DO CONTRÁRIO, ESCREVEMOS $u \not\to S$.

DIZEMOS QUE T POSSUI A PROPRIEDADE $\mathcal{T}_k$ SE PARA TODO SUBCONJ. $S \in \binom{V(T)}{k}$, HÁ UM VÉRTICE $u \in V(T) \setminus S$ T.q. $u \to S$.

TEOREMA (ERDŐS, 1963): SE $n \geq k^2 2^{k+1}$, ENTÃO EXISTE UM TORNEIO COM n VÉRTICES COM A PROPRIEDADE $\mathcal{T}_k$.

PROVA: CONSIDERE UM TORNEIO ALEATÓRIO T, I.E., PARA CADA PAR $u, v \in V(T)$ ESCOLHEMOS DE FORMA IND. E UNIFORME ENTRE (u,v) OU (v,u).

SEJA $S \subseteq \binom{V(T)}{k}$. NOTE QUE PARA CADA VÉRTICE $u \in V(T) \setminus S$ TEMOS QUE

$$\mathbb{P}(u \to S) = 2^{-k}$$

SEJA A_S O EVENTO "PARA TODO $u \in V(T) \setminus S$ TEMOS $u \not\to S$".

$$\mathbb{P}(A_S) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{u \in V(T) \setminus S} \{u \not\to S\}\Big) = \prod \mathbb{P}(\{u \not\to S\}) = (1-2^{-k})^{n-k}$$

PELA COTA DA UNIÃO

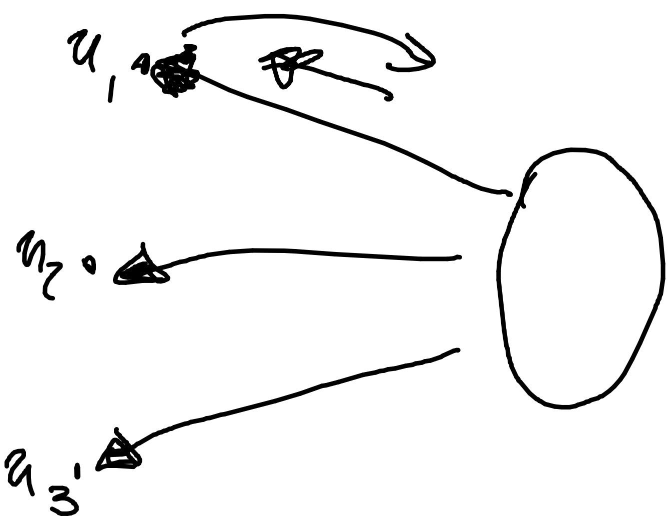
$$\mathbb{P}(\cup A_S) \leq \sum \mathbb{P}(A_S) = \binom{n}{k} \cdot \underline{(1-2^{-k})^{n-k}} \overset{1+x \leq e^x}{\leq} \frac{n^k}{k!} \cdot e^{-2^{-k} \cdot (n-k)}$$

AF: os eventos $\{u \not\to S\}$ são mutuamente ind.

$$\mathbb{P}(\{u \not\to S\}) = 1 - \mathbb{P}(\{u \to S\}) = 1 - 2^{-k}$$

$$R \subseteq V(T) \setminus S$$

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{u \in R} \{u \not\to S\}\Big) = \prod_{u \in R} \underbrace{\Big(u \overset{\nexists}{\longleftarrow} S \Big)}_{\mathbb{P}(u \not\to S)} = (1 - 2^{-k})^{n-k}$$



PELA COTA DA UNIÃO

$$\mathbb{P}(\cup A_S) \leq \sum \mathbb{P}(A_S) = \binom{n}{k} \cdot \left(1 - 2^{-k}\right)^{n-k} \overset{1+x \leq e^x}{\leq} \frac{n^k}{k!} \cdot e^{-2^{-k} \cdot (n-k)}$$

$$= \frac{n^k}{k!} \cdot e^{-\frac{(n-k)}{2^k}} = \frac{n^k}{k!} \cdot e^{\frac{k}{2^k}} \cdot e^{-\frac{n}{2^k}} \leq n^k \cdot e^{-\frac{n}{2^k}}$$

$$\leq n^k e^{-\frac{n}{2^k}} = e^{k \log n} \cdot e^{-\frac{n}{2^k}}$$

$$= e^{k \log n - \frac{n}{2^k}} < 1$$

$$n \geq k^2 2^{k+1}$$

$$\Downarrow$$

$$k \log n < \frac{n}{2^k}$$

$$k \cdot 2^k < \frac{n}{\log n}$$