**Teorema.** Seja $p = p(n) \in (0,1)$. Então

$$\alpha\big(G(n,p)\big) \leq \frac{2 \log n}{p}$$

com alta probabilidade.

**Corolário:** Seja $p = p(n) \in (0,1)$. Então

$$\chi\big(G(n,p)\big) \geq \frac{pn}{2 \log n}$$

com alta probabilidade.

**COROLÁRIO:** SEJA $p = p(n) \in (0,1)$. ENTÃO

$$\chi(G(n,p)) \geq \frac{pn}{2\log n}$$

COM ALTA PROBABILIDADE.

$$\alpha(G(n,p)) \leq \frac{2\log n}{p}$$

**PROVA:** SABEMOS QUE $\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq n$.

APLICANDO ISSO A $G(n,p)$, OBTEMOS

$$\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)} \geq \frac{pn}{2\log n}$$

$\blacksquare$

# MÉTODO DA ALTERAÇÃO

- COMEÇAR COM UMA CONSTRUÇÃO ALEATÓRIA
- MOSTRAR QUE TAL CONSTRUÇÃO TEM PROBABILIDADE POSITIVA DE TER PROPRIEDADES BOAS
- USAR AS PROPRIEDADES BOAS PARA OBTER A PROPRIEDADE DESEJADA.

TEOREMA: SE $G$ É UM GRAFO COM GRAU MÉDIO $d$, ENTÃO

$$\alpha(G) \geq \frac{n}{2d}$$

$$d = \frac{1}{n}\sum d(v) = \frac{2e(G)}{n}$$

PROVA: TOME $m = e(G)$ E $p \in [0,1]$ QUE SERÁ ESCOLHIDO DEPOIS.

SEJA $A$ UM CONJUNTO ALEATÓRIO ESCOLHIDO COM PROBABILIDADE $p$.

EM PARTICULAR, TEMOS $\mathbb{E}[|A|] = n \cdot p$ $\qquad Y = |A| - e(G[A])$

AGORA, PARA CADA $uv \in E(G)$ TEMOS

$$\mathbb{P}(uv \in E(G[A])) = \mathbb{P}(u \in A) \cdot \mathbb{P}(v \in A) = p^2$$

CONSEQUENTEMENTE $\mathbb{E}[e(G[A])] = p^2 \cdot e(G) = \frac{p^2 dn}{2}$

LOGO,

$$\mathbb{E}[|A| - e(G[A])] = \mathbb{E}[|A|] - \mathbb{E}[e(G[A])]$$

$$\geq np - \frac{p^2 dn}{2} = pn\left(1 - \frac{pd}{2}\right)$$

$$\mathbb{E}\big[|A| - e(G[A])\big] = \mathbb{E}\big[|A|\big] - \mathbb{E}\big[e(G[A])\big]$$

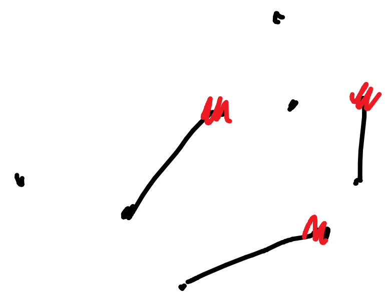
$$\geq np - \frac{p^2 d n}{2} = pn\left(1 - \frac{pd}{2}\right)$$

TOME $p = 1/d$. ENTÃO $\mathbb{E}\big[\underbrace{|A| - e(G[A])}\big] \geq \frac{n}{2d}$

EXISTE $A \subseteq V(G)$ T.Q. $|A| - e(G[A]) \geq \frac{n}{2d}$

ENTÃO HÁ $B \subseteq A$ T.Q. $|B| \leq e(G[A])$ E $A \setminus B$ É IND.

$$\alpha(G) \geq |A \setminus B| = |A| - |B| \geq |A| - e(G[A]) \geq \frac{n}{2d}$$ ∎



**TEOREMA:** PARA TODO $K \in \mathbb{N}$ EXISTE GRAFO $G$ T.Q.

$$\chi(G) \geqslant K \quad \text{E} \quad g(G) \geqslant K$$

↳ CINTURA = COMPRIMENTO DO CICLO MAIS CURTO.

**PROPOSIÇÃO** (DESIGUALDADE DE MARKOV). SE $X$ É UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA NÃO NEGATIVA E $\lambda > 0$, ENTÃO

$$\mathbb{P}(X \geqslant \lambda) \leqslant \frac{\mathbb{E}[X]}{\lambda}$$

**PROVA:** SEJA $A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \geqslant \lambda\}$.

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \mathbb{P}(\omega) \geqslant \sum_{\omega \in A} X(\omega) \cdot \mathbb{P}(\omega) \geqslant \sum_{\omega \in A} \lambda \cdot \mathbb{P}(\omega)$$

$$= \lambda \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega) = \lambda \mathbb{P}(A) \qquad \blacksquare$$

PROVA: FIXE $k \in \mathbb{N}$ E SEJA $G' = G(n, p)$ COM $p = n^{\varepsilon - 1} = \frac{1}{n^{1-\varepsilon}}$

EM QUE $\varepsilon = 1/k$

SEJA $X$ O NÚMERO DE CICLOS DE COMPRIMENTO NO MÁXIMO $k-1$.

HÁ NO MÁXIMO $n^i$ CICLOS DE COMP. EXATAMENTE $i$ EM $K_n$

SEGUE QUE

$$\mathbb{E}[X] \leqslant \sum_{i=3}^{k-1} \underbrace{n^i \cdot p^i}_{(np)^i} = \sum_{i=3}^{k-1} n^{\varepsilon i} < k \cdot n^{\varepsilon(k-1)} = k \cdot n^{\frac{(k-1)}{k}}$$

PELA DES. DE MARKOV $\mathbb{P}\left(X \geqslant \frac{n}{2}\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}[X]}{n/2} = \frac{2k}{n^{1/k}} \longrightarrow 0$

LOGO, COM ALTA PROBABILIDADE $G'$ POSSUI MENOS DO QUE $n/2$ CICLOS DE COMP. MENOR QUE $k$.

Pelo teorema da aula passada $\alpha(G(n,p)) \leq \dfrac{2\log n}{p}$ com alta probabilidade

Então existe um grafo $G'$ com $n$ vtxs, no máximo $n/2$ ciclos de comp. menor que $k$, e t.q. $\alpha(G') \leq 2n^{1-1/k}\log n$

Removendo um vtx de $G'$ de cada ciclo de comprimento menor que $k$, obtemos um grafo $G$ com $n/2$ vértices

$$c(G) \geq k \quad \text{e} \quad \alpha(G) \leq \alpha(G') \leq 2n^{1-1/k}\log^{2} n$$

Como $\chi(G) \geq \dfrac{n/2}{\alpha(G)} \geq \dfrac{n/2}{2n^{1-\varepsilon}\log n} = \dfrac{n^{\varepsilon}}{4\log n} \geq k$ se $n$ é grande

$\blacksquare$

TEOREMA: EXISTE $c > 0$ TAL QUE

$$R(3,k) \geq \left(\frac{ck}{\log k}\right)^{3/2}$$

PARA $k$ SUFICIENTEMENTE GRANDE.

PROVA: SEJA $n = \left(\dfrac{k}{4\log k}\right)^{3/2}$. MOSTRAREMOS QUE EXISTE

$$\log n = \frac{3}{2}\log\frac{k}{4\log k} < \frac{3}{2}\log k$$

$< k$

QUANDO $k \to \infty$

GRAFO SEM TRIÂNGULOS $G$, COM $n/2$ VTXS E T.Q. $\alpha(G) < k$.

CONSIDERE $G(n,p)$ COM $p = n^{-2/3}$ E NOTE QUE

$$\frac{1}{p} = n^{2/3} = \frac{k}{4\log k} \rightsquigarrow pk = 4\log k \rightsquigarrow$$

PELO TEO. DA AULA PASSADA $\alpha(G(n,p)) \leq \dfrac{2\log n}{p} < k$

POIS $n < k^2$ E, PORTANTO, $\log n < 2\log k$

SEJA $X$ O NÚMERO DE TRIÂNGULOS EM $G(n,p)$

$$\mathbb{E}[X] = p^3\binom{n}{3} \leq \frac{p^3 n^3}{6} = \frac{n}{6}$$

$$\frac{1}{p} = n^{2/3}$$

$$p = n^{-2/3}$$

$$p^3 = n^{-2}$$

PELA DES. DE MARKOV.

$$\mathbb{P}\left(X \geq \frac{n}{2}\right) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{n/2} = \frac{n/6}{n/2} = \frac{1}{3}$$

LOGO, EXISTE GRAFO $G'$ T.Q. $\alpha(G') < k$ E $X(G') < \frac{n}{2}$

REMOVENDO UM VTX DE CADA TRIÂNGULO, OBTEMOS UM GRAFO $G$ SEM TRIÂNGULOS E T.Q. $\alpha(G) < k$ COM

$$\frac{n}{2} = \left(\frac{k}{4\log k}\right)^{3/2}$$ VÉRTCES

$\blacksquare$