DEF: O NÚMERO TAMANHO RAMSEY DE H É DEFINIDO COMO

$$\hat{r}(H) = \min\{e(G) : G \to H\}$$

TEOREMA (BECK, 1983): EXISTE $C > 0$ T.Q.

$$\hat{r}(P_K) \leqslant C \cdot K$$

PARA TODO $K \in \mathbb{N}$.

TEOREMA (BECK, 1983): EXISTE $C>0$ T.q.

$$\hat{r}(P_K) \leq C \cdot K$$

PARA TODO $K \in \mathbb{N}$.

IDEIA: ESCOLHEMOS UM GRAFO ALEATÓRIO $G = G(n,p)$ COM $n = a \cdot K$

E $p = \frac{c}{n} = \frac{c}{aK}$. ISSO IMPLICA QUE

$$\mathbb{E}[e(G)] = p \cdot \binom{n}{2} \approx p\frac{n^2}{2} = \frac{c}{\cancel{n}} \cdot \frac{n^{\cancel{2}}}{2} = \frac{c \cdot a \cdot K}{2}$$

1) VAMOS MOSTRAR QUE ENTRE QUAISQUER DOIS CONJUNTOS X, Y GRANDES HÁ UMA ARESTA

2) VAMOS PARTICIONAR $V(G)$ EM QUATRO CONJUNTOS

$$V(G) = X \cup Y \cup A \cup B$$

T.q. A "É" UM CAMINHO AZUL, B "É" UM CAMINHO VERMELHO, E $e(X,Y) = 0$ E $|X| = |Y|$

LOGO X E Y SÃO PEQUENOS E A OU B TEM SER GRANDE.

Lema: Seja $c>0$ e considere o grafo aleatório $G=G(n,p)$ com $p=c/n$. Temos

$$\mathbb{P}\left(e(G)\geq pn^2\right)\leq e^{-\frac{cn}{8}}$$

Prova: Note $e(G)$ é uma variável aleatória binomial com média

$$\mu=p\binom{n}{2}\approx p\frac{n^2}{2}$$

$$\mathbb{P}(|X-\mu|\geq \varepsilon\cdot\mu)\leq 2\cdot e^{-\varepsilon^2\mu/3}$$

$\overset{1}{\underset{\|}{\varepsilon}}$

Pela Des. de Chernoff, temos

$$\mathbb{P}\left(e(G)\geq pn^2\right)=\mathbb{P}\left(e(G)-\mu\geq pn^2-\mu\right)$$

$$\cancel{pn^2}=(1+\varepsilon)\cancel{p}\frac{\cancel{n^2}}{2}\qquad\leq\mathbb{P}\left(|e(G)-\mu|\geq pn^2-\mu\right)\leq e^{-\mu/3}$$

$\varepsilon=1$

$$=e^{-p\binom{n}{2}/3}=e^{-\frac{c}{3n}\binom{n}{2}}<e^{-\frac{c}{3}\frac{(n-1)}{2}}<e^{-\frac{cn}{8}}\qquad\blacksquare$$

LEMA Seja $c > 0$ e considere o grafo aleatório $G = G(n,p)$ com $p = \frac{c}{n}$. Com alta probabilidade,

$$e(X,Y) \geq 1$$

para todo $X, Y \subseteq V(G)$ disjuntos com $|X| \geq |Y| \geq 3c^{-1/2} n$

Prova: Como X e Y são disjuntos $e(X,Y)$ é uma variável bin. com média $\mu = p|X||Y|$. Suponha que $|X| \geq |Y| \geq 3c^{-1/2} n$

Pela des. de Chernoff

$$9c^{-1} p n^2 = 9n$$

$$\mathbb{P}(e(X,Y) = 0) \leq \mathbb{P}(|e(X,Y) - \mu| \geq \mu)$$

$$\leq 2 \cdot e^{-\frac{p|X||Y|}{3}} \leq 2 \cdot e^{-\frac{p}{3} 9 c^{-1} n^2} = 2 \cdot e^{-3n} \leq e^{-2n}$$

Temos $\leq 4^n$ formas de escolher X e Y.

Pela cota da união, a probabilidade de existir tais X e Y é no máximo $4^n \cdot e^{-2n} = (4 \cdot e^{-2})^n \longrightarrow 0$

<u>TEOREMA (BECK, 1983)</u>: EXISTE $C>0$ T.Q.

$$\hat{r}(P_K) \leq C \cdot K$$

PARA TODO $K \in \mathbb{N}$.

<u>PROVA</u>: SEJAM a E c CONSTANTES POSITIVAS GRANDES.

TOME $n = a \cdot K$ E $C = a \cdot c$.

PELO LEMA, COM $p = \frac{c}{n}$ EXISTE UM GRAFO G COM n VÉRTICES E $e(G) \leq pn^2 = cn = c \cdot a \cdot K = CK$ E TAL QUE $e(X,Y) \geq 1$ PARA QUAISQUER X E Y DISJUNTOS COM $|X| \geq |Y| \geq 3c^{-\frac{1}{2}}n$

VAMOS MOSTRAR QUE $G \rightarrow P_K$.

SUPONHA QUE EXISTE 2-COL. DE G SEM P_K MONOX.

ALGORITMO DE BUSCA EM PROFUNDIDADE

Algoritmo de Busca em Profundidade

→ Em cada passo do algoritmo teremos uma partição

$$V(G) = A \cup X \cup Y$$

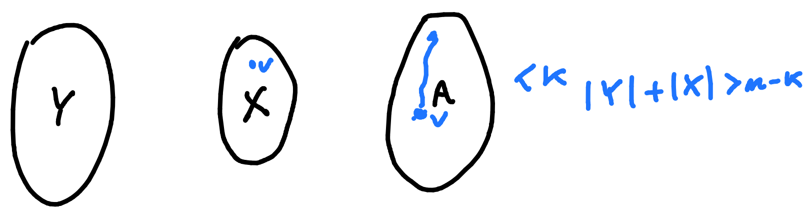
→ No começo tomamos $A = X = \emptyset$ e $Y = V(G)$

- Se A é vazio, movemos um vértice qualquer de Y para A
- Se A não é vazio, seja v o último vértice de A (v é o final do caminho). Se v possui vizinho azul u em Y, mova u para A; caso contrário mova v para X

→ Em todo passo não há arestas azuis entre X e Y

→ Em cada passo, $|Y| - |X|$ diminui em 1

→ Paramos quando $|X| = |Y|$



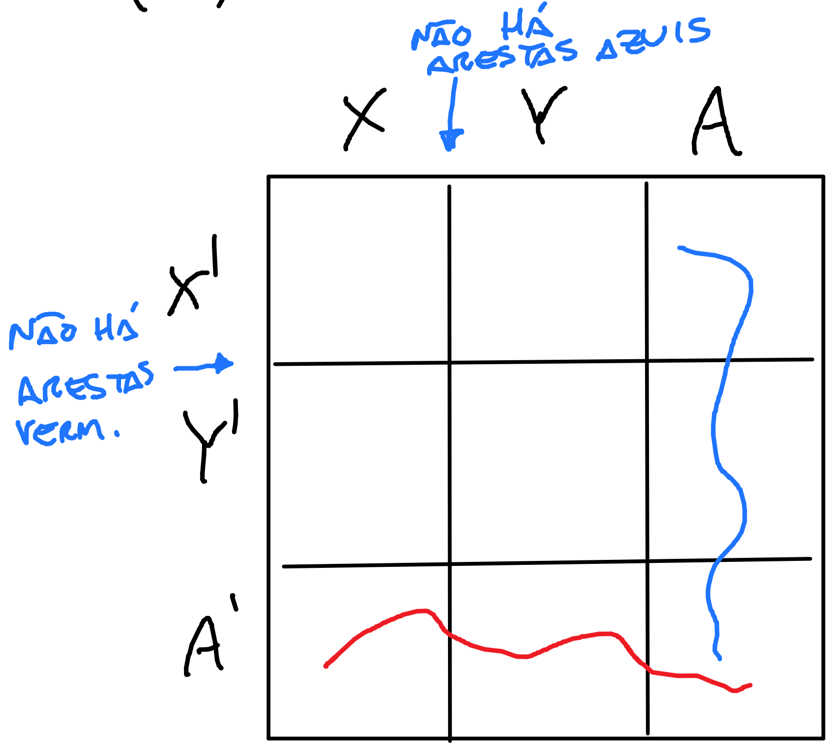
Note $|X| + |Y| = n - |A| \geq a \cdot k - k$ $\qquad |A| \leq k$

$$= (a-1) \cdot k$$

Logo $|X| = |Y| \geq \frac{k(a-1)}{2}$

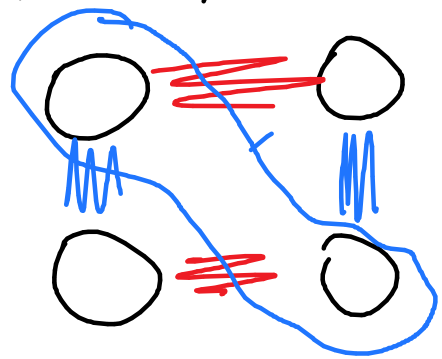
Podemos obter uma partição análoga para a cor vermelha

$$V(G) = X' \cup Y' \cup A'$$



$$P_1 = \{(X, X'), (Y, Y')\} \qquad P_2 = \{(X, Y'), (Y, X')\}$$

AF: EXISTE $i \in \{1, 2\}$ T.q. PARA TODO $(U, W) \in P_i$



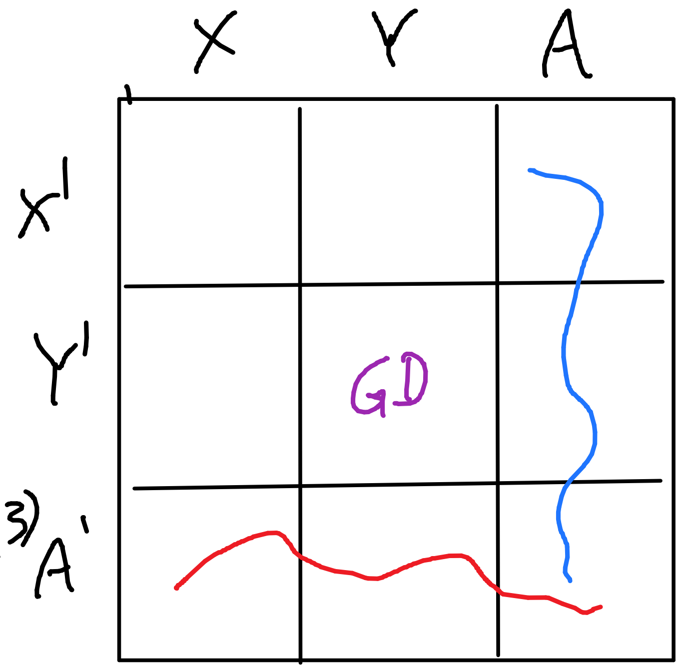
$$|U \cap W| \geq \frac{k(a-3)}{4}$$

PROVA: LEMBRE-SE QUE $|X| = |Y| \geq \dfrac{k(a-1)}{2}$

SE $|X \cap X'|$ E $|X \cap Y'| < \dfrac{k(a-3)}{4}$,

ENTÃO

$$\frac{k(a-3)}{2} > |X \cap X'| + |X \cap Y'| \geq |X| - |A'|$$
$$\geq \frac{k(a-1)}{2} - k = \frac{k(a-3)}{2}$$



$$P_1 = \{ \underbrace{(X, X')}, (Y, Y') \}$$

X NÃO HÁ AZUL Y

X' NÃO HÁ VERMELHO Y'

AF: EXISTE $i \in \{1, 2\}$ T.Q. PARA TODO $(U, W) \in P_i$

$$|U \cap W| \geq \frac{k(a-3)}{4}$$

DIGAMOS $i = 1$: $|X \cap X'| \geq \frac{k(a-3)}{4}$ E $|Y \cap Y'| \geq \frac{k(a-3)}{4}$

NOTE QUE $e(X \cap X', Y \cap Y') = 0$

COMO c É SUFICIENTEMENTE GRANDE, TEMOS

$$|X \cap X'| = |Y \cap Y'| = \frac{k(a-3)}{4} \geq \frac{k \cdot a}{8} \geq 3c^{-1/2} \cdot ak = 3 \cdot c^{-1/2} \cdot n$$

$a \geq 6$

$a - 3 \geq \frac{a}{2}$

$\Leftarrow$

$c^{1/2} \geq 24$

$\blacksquare$

É SABIDO QUE

$$\left(\frac{15}{4} - o(1)\right)K \leq \hat{r}(P_K) \leq 74K$$