$$G = H_1 \cup H_2$$

$$H_1 \rightsquigarrow G(n, p_1) \qquad H_2 \rightsquigarrow G(n, p_2)$$

$$\mathbb{P}(uv \notin E(G)) = (1-p_1)(1-p_2)$$

$$u, v \in V(G)$$

$$\mathbb{P}(uv \in E(G)) = 1 - (1-p_1)(1-p_2)$$

$$G \rightarrow G\left(n,\ 1-(1-p_1)(1-p_2)\right)$$

$$p = 1 - (1-p_1)(1-p_2)$$

$$p - 1 = (1-p_1)(1-p_2)$$

$$\frac{p-1}{1-p_1} = 1 - p_2$$

$$p_2 = 1 - \frac{1-p}{1-p_1}$$

$G = G(n,p)$ com $p \geq (1+\varepsilon)\dfrac{\log n}{n}$

$= H_1 \cup H_2 \qquad H_i = G(n, p_i)$

$\quad$ e $\quad p_1 = (1+\varepsilon)\dfrac{\log n}{n}$

$\quad$ e $\quad p_2 = 1 - \dfrac{1-p}{1-p_1}$

Teorema: Para qualquer função $\omega(n) \gg 1$,

$$\mathbb{P}(G(n,p) \text{ é conexo}) \to \begin{cases} 0, & \text{se } p \leq \dfrac{\log n - \omega(n)}{n} \\ 1, & \text{se } p \geq \dfrac{\log n + \omega(n)}{n} \end{cases}$$

Teorema: Para toda constante $\varepsilon > 0$, temos

$$\mathbb{P}(G(n,p) \text{ é conexo}) = \begin{cases} 0, & \text{se } p \leq \dfrac{\overbrace{(1-\varepsilon)\log n}^{\log n - \varepsilon \log n}}{n} \\ 1, & \text{se } p \geq \dfrac{(1+\varepsilon)\log n}{n} \end{cases}$$

$\log n + \varepsilon \log n$

quando $n \to \infty$.

Dizemos que $p_c = \dfrac{\log n}{n}$ é um limiar súbito se a prob. do evento muda de $o(1)$ para $1-o(1)$ quando p vai de $(1-\varepsilon)p_c$ para $(1+\varepsilon)p_c$.

LIMIARES

$$\mathbb{P}(K_3 \subseteq G(n,p)) \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{SE} \quad p \ll \frac{1}{n} \\ 1 & \text{SE} \quad p \gg \frac{1}{n} \end{cases}$$

DEF: UMA FUNÇÃO $p_c = p_c(n)$ É UM limiar PARA A FAMÍLIA DE GRAFOS $\mathcal{A}$ SE

$$\mathbb{P}(G(n,p) \in \mathcal{A}) \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{SE} \quad p \ll p_c \\ 1 & \text{SE} \quad p \gg p_c \end{cases}$$

QUANDO $n \to \infty$

Def: Uma função $p_c = p_c(n)$ é um limiar para a família de grafos $\mathcal{A}$ se

$$\mathbb{P}\big(G(n,p) \in \mathcal{A}\big) \to \begin{cases} 0 & \text{se } p \ll p_c \\ 1 & \text{se } p \gg p_c \end{cases}$$

quando $n \to \infty$

Def: Denote por $\mathcal{G}$ a coleção de todos os grafos e $\mathcal{G}_n$ a col. dos grafos com n vértices. Uma família $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{G}_n$ é crescente se $G \in \mathcal{A}_n$ e $G \subseteq H \subseteq K_n$ implicam em $H \in \mathcal{A}_n$. E $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{G}$ é crescente se $\mathcal{A}_n = \mathcal{A} \cap \mathcal{G}_n$ é crescente para todo $n \in \mathbb{N}$.

Def: $\mathcal{A}$ é não trivial se $\mathcal{A}_n \notin \{\emptyset, \mathcal{G}_n\}$ para todo n suf. grande.

DEF: Denote por $\mathcal{G}$ a coleção de todos os grafos e $\mathcal{G}_n$ a col. dos grafos com n vértices. Uma família $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{G}_n$ é crescente se $G \in \mathcal{A}_n$ e $G \subseteq H \subseteq K_n$ implicam em $H \in \mathcal{A}_n$. E $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{G}$ é crescente se $\mathcal{A}_n = \mathcal{A} \cap \mathcal{G}_n$ é crescente para todo $n \in \mathbb{N}$.

DEF: $\mathcal{A}$ é não trivial se $\mathcal{A}_n \notin \{\emptyset, \mathcal{G}_n\}$ para todo n suf. grande

TEOREMA (Bollobás - Thomasson, 1987): Toda família não-trivial e crescente de grafos possui um limiar.

SUBGRAFOS PEQUENOS

A_H = GRAFOS QUE CONTÊM CÓPIA DE H.

→ Qual é o limiar de A_H?

SEJA X_H A VAR. QUE CONTA O NÚMERO DE CÓPIAS DE H

$$\mathbb{E}[X_H] = O\left(n^{v(H)} \cdot p^{e(H)}\right) \longrightarrow 0$$

$$\mathbb{P}(X_H \geq 1) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{MARKOV}}}{\leq} \mathbb{E}[X_H] \longrightarrow 0$$

$$n^{v(H)} \cdot p^{e(H)} \longrightarrow 0 \qquad p \ll n^{-v(H)/e(H)}$$

Lema: Sejam F e H dois grafos t.q. $F \subseteq H$ e $e(F) \geq 1$.

Se $p \ll n^{-v(F)/e(F)}$, então

$$\mathbb{P}(H \subseteq G(n,p)) \longrightarrow 0$$

quando $n \to \infty$.

Prova: Seja X_F o número de cópias de F em $G(n,p)$ e

note que $\{H \subseteq G(n,p)\} \subseteq \{X_F \geq 1\}$

$$\mathbb{P}(H \subseteq G(n,p)) \leq \mathbb{P}(X_F \geq 1)$$

pois se há zero cópias de F, então $H \not\subseteq G(n,p)$.

Há $O(n^{v(F)})$ cópias de F em K_n, e cada cópia está contida em $G(n,p)$ com prob. $p^{e(F)}$. Logo

$$\mathbb{E}[X_H] = O(n^{v(F)} p^{e(F)}) \to 0 \quad \text{quando } n \to \infty \quad \blacksquare$$

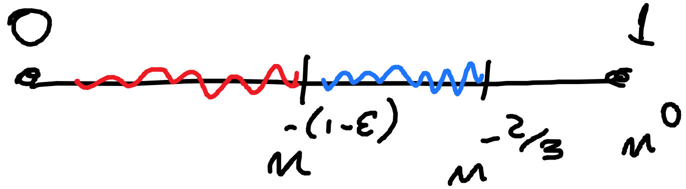
Lema: Sejam F e H dois grafos t.q. $F \subseteq H$ e $e(F) \geq 1$.

Se $p \ll n^{-v(F)/e(F)}$, então

$$\mathbb{P}(H \subseteq G(n,p)) \longrightarrow 0$$

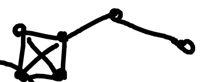
quando $n \to \infty$.

Ex: Seja H um grafo obtido da união de uma clique com um caminho muito longo

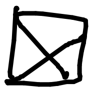


$H =$ 

$$v(H)/e(H) = \frac{N}{N+2} \longrightarrow 1 \rightsquigarrow p \ll n^{-(1-\varepsilon)}$$



$\frac{6}{8}$

$F =$  $\quad \frac{v(F)}{e(F)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Pelo lema, se $p \ll n^{-2/3}$, então

$$\mathbb{P}(H \subseteq G(n,p)) \longrightarrow 0$$

LEMA: SEJAM F E H DOIS GRAFOS T.Q. $F \subseteq H$ E $e(F) \geq 1$. SE $p \ll n^{-v(F)/e(F)}$, ENTÃO

$$\mathbb{P}(H \subseteq G(n,p)) \to 0$$

QUANDO $n \to \infty$.

PARA CADA GRAFO, DEFINA

$$m(H) = \max \left\{ \frac{e(F)}{v(F)} : F \subseteq H,\ v(F) \geq 1 \right\}$$

PELO LEMA ANTERIOR, TEMOS

$$\mathbb{P}(H \subseteq G(n,p)) \to 0$$

QUANDO $n \to \infty$ SEMPRE QUE $p \ll n^{-1/m(H)}$

DE FATO, O LIMIAR PARA H É $n^{-1/m(H)}$.

$$\mathbb{P}(X \geq \lambda \mathbb{E}[X]) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{\lambda \mathbb{E}[X]} = \frac{1}{\lambda}$$

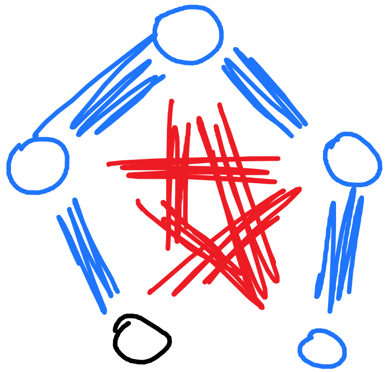
$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \lambda \mathbb{E}[X]) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\lambda^2 \mathbb{E}[X]^2} = \frac{\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2}{\lambda^2 \mathbb{E}[X]^2} = \frac{1}{\lambda} \frac{\mathbb{E}[X^2]}{\mathbb{E}[X]^2} - \frac{1}{\lambda^2}$$

Teoria de Ramsey em $G(n,p)$

$G \to H$: Toda 2-coloração de G possui cópia monoχ de H.

Teorema (Folkman, 1970): Existe grafo K_4-livre G t.q. $G \to K_3$

K_6 - livre



Teorema (Frankl-Rödl, 1986) Seja $p \geq n^{-\frac{1}{2}+c}$ para alguma constante $c > 0$. Com alta probabilidade, toda 2-coloração das arestas de $G(n,p)$ contém pelo menos $\left(\frac{1}{4} + o(1)\right) p^3 \binom{n}{3}$ triâng. monoχ.

LEMA. SE $p \gg 1/n$, ENTÃO COM ALTA PROB. $G(n,p)$ CONTÉM

$$p^3\binom{n}{3} + o(p^3 n^3) \sim \quad \forall \varepsilon$$

$$(1-\varepsilon)p^3\binom{n}{3} \leq X \leq (1+\varepsilon)p^3\binom{n}{3}$$

ε

TRIÂNGULOS.

PROVA: X = # CÓPIAS DE K_3

$$\mathbb{E}[X] = \Theta(n^3p^3) \longrightarrow \infty \quad \text{E} \quad \text{Var}(X) = o(\mathbb{E}[X]^2)$$

$$\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\cdot\mathbb{E}[X]) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2\,\mathbb{E}[X]^2} \longrightarrow 0 \quad \blacksquare$$

LEMA: SEJA $pk \gg \log n$. COM ALTA PROB.

$$e(S) = p\binom{k}{2} + o(pk^2)$$

PARA TODO CONJUNTO S CONTENDO k VÉRTICES DE $G(n,p)$.

LEMA: SEJA $p^2 n \gg \log n$, ENTÃO COM ALTA PROB.

$$d(v) = pn + o(pn) \quad \text{E} \quad |N(u) \cap N(v)| \leqslant 3p^2 n$$

PARA TODOS $u, v \in V(G(n,p))$ COM $u \neq v$.

<u>LEMA</u>: SE $p \gg n^{-\frac{1}{2}+c}$ PARA ALGUMA CONSTANTE $c > 0$, ENTÃO COM ALTA PROB, PARA TODO $u \in V(G(n,p))$ E TODO SUBCONJUNTO $S \subseteq N(u)$ VALE

$$e(S) = p\binom{|S|}{2} + o(p^3 n^2)$$