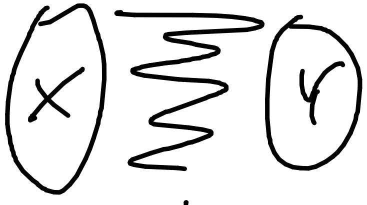
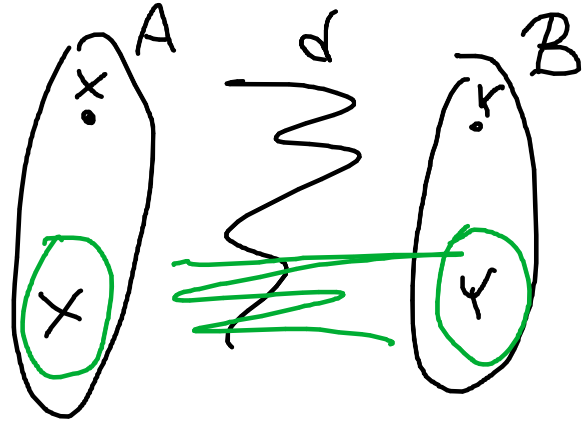
Método da Regularidade



$0 \leq d \leq 1$



- Partições regulares

Dados conjuntos disjuntos $X, Y \subseteq V(G)$ a densidade do par (X,Y) é

$$d(X,Y) = \frac{e(X,Y)}{|X||Y|}$$

Def: (Par ε-regular). Dado grafo G e $\varepsilon > 0$, e subconjuntos disjuntos $A, B \subseteq V(G)$, dizemos que (A,B) é ε-regular se para todo conjunto $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$ t.q. $|X| \geq \varepsilon \cdot |A|$ e $|Y| \geq \varepsilon \cdot |B|$ temos

$$|d(A,B) - d(X,Y)| \leq \varepsilon \longrightarrow d(X,Y) \leq d(A,B) + \varepsilon$$

Dado um grafo G, uma partição $V(G) = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_k$ é dita uma equipartição se

$$|V_0| \leq \overbrace{|V_1| = |V_2| = \dots = |V_k|}$$

↳ conjunto excepcional

Há uma outra definição que pede $V(G) = V_1 \cup \dots \cup V_k$ t.q.

$$\big||V_i| - |V_j|\big| \leq 1$$

para todos $1 \leq i < j \leq k$.

<u>Def</u> (Partição ε-regular). Dados grafo G e $\varepsilon > 0$, dizemos que uma equipartição $V(G) = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_k$ é ε-regular se

DEF (Partição ε-regular). Dados grafo G com n vértices e $\varepsilon > 0$, dizemos que uma equipartição $V(G) = V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_k$ é ε-regular se

(i) $|V_0| \leq \varepsilon \cdot n$

(ii) é se no máximo εk^2 pares (V_i, V_j) com $1 \leq i < j \leq n$ não são ε-regulares.

LEMA (LEMA DA REGULARIDADE). PARA TODOS $\varepsilon > 0$ E $m \in \mathbb{N}$, EXISTE $M(\varepsilon, m)$ TAL QUE PARA QUALQUER GRAFO G EXISTE UMA PARTIÇÃO ε-REGULAR

$$V(G) = V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_K$$

NA QUAL $m \leqslant K \leqslant M$.

OBS 1: TODO GRAFO ADMITE UMA PART. ε-REG COM APENAS UMA PARTE

$$V(G) = V_0 \cup V_1 \quad \text{EM QUE} \quad \underbrace{V_0 = \emptyset}_{\leq \varepsilon n} \quad V_1 = V(G)$$

OBS 2: TODO GRAFO ADMITE UMA PART. ε-REG E n PARTES

$$V(G) = V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_n \quad \text{EM QUE} \quad V_0 = \emptyset \quad \text{E} \quad V_i = \{u_i\}$$

SEJA $V(G) = V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_k$ UMA PART. ε-REG.

m

NOTE QUE

$$|V_i| = \frac{n - \overbrace{|V_0|}^{\leq \varepsilon n}}{k} \geq (1-\varepsilon)\frac{n}{k}$$

$$M = M(\varepsilon, m)$$

$n >> M$

DENTRO DAS PARTES, PODEMOS TER

$$k \binom{(1-\varepsilon)\frac{n}{k}}{2} \approx k(1-\varepsilon)^2 \frac{n^2}{2k^2} = \frac{(1-\varepsilon)^2}{2k} n^2 \geq \frac{(1-\varepsilon)^2}{M} \cdot n^2$$

$K_{10} = 45$

$k \leq M$

$$\frac{n}{M} = \Theta(n^2)$$

$$e(G) = o(n^2)$$

Lemas de Imersão e Contagem

Lema (Lema de Imersão para Triângulos)

Seja G um grafo e sejam $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ com $\varepsilon < \frac{\delta}{4}$. Sejam $A_1, A_2, A_3 \subseteq V(G)$ subconjuntos disjuntos não vazios, e suponha que, para todo $1 \leqslant i < j \leqslant 3$, o par (A_i, A_j) é ε-regular com densidade $d(A_i, A_j) \geqslant \delta$.

Então $K_3 \subseteq G$.

LEMA. SEJA $\varepsilon > 0$ E SEJA (A,B) UM PAR ε-REGULAR NUM GRAFO G. ENTÃO

$$(d(A,B)-\varepsilon)|B| \leq |N_G(v)\cap B| \leq (d(A,B)+\varepsilon)|B|$$

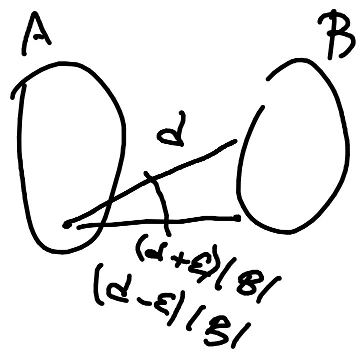
PARA TODOS EXCETO NO MÁXIMO $2\varepsilon|A|$ VÉRTICES $v\in A$.

PROVA: SEJA X O CONJUNTO DE VÉRTICES DE A COM "VIZINHOS DEMAIS", i.e.

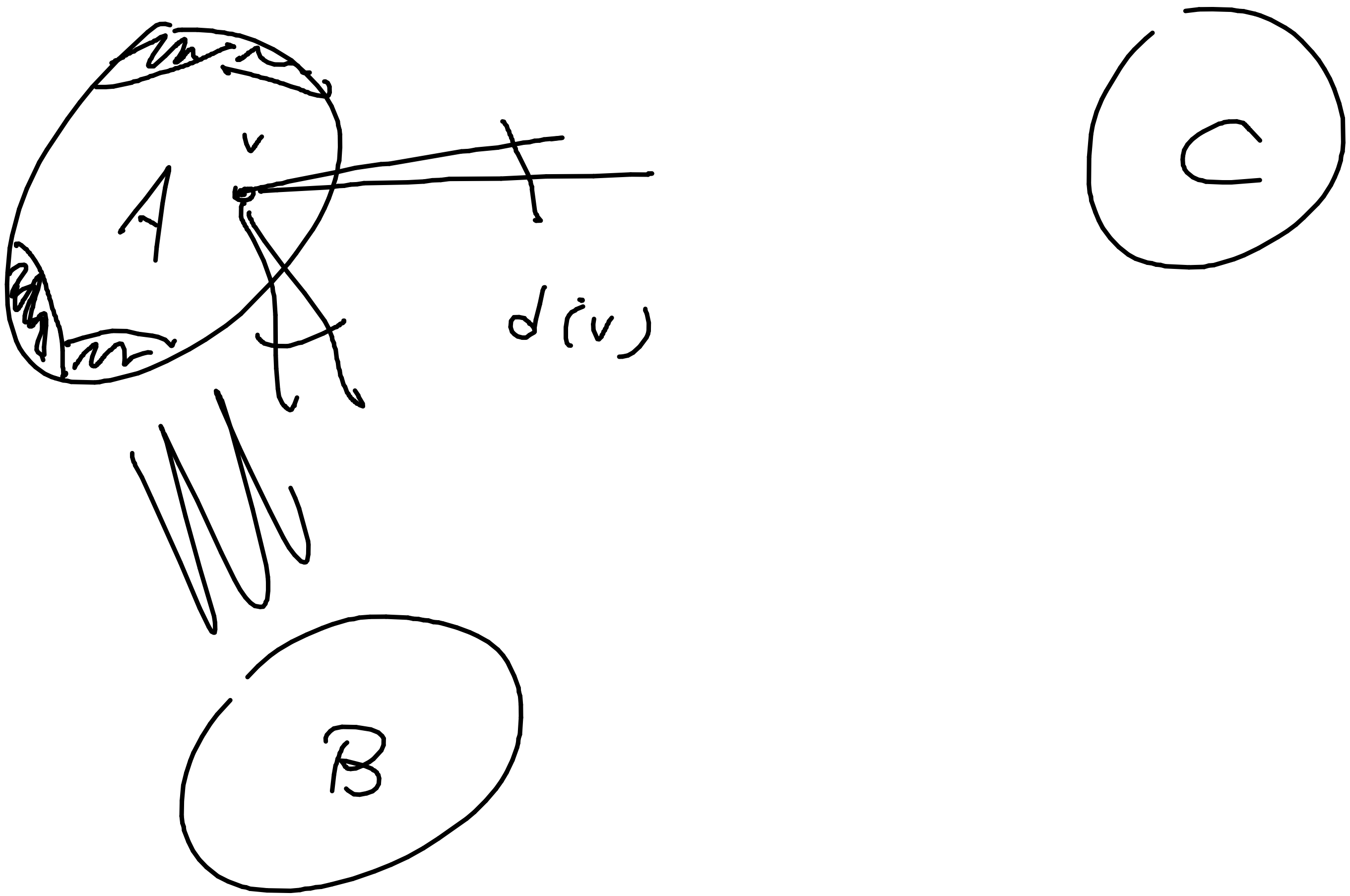
$$X = \{ v\in A : |N_G(v)\cap B| > (d(A,B)+\varepsilon)|B| \}$$

ENTÃO

$$d(X,B) = \frac{e(X,B)}{|X||B|} > \frac{(d(A,B)+\varepsilon)\cancel{|B|}\cancel{|X|}}{\cancel{|X|}\cancel{|B|}}$$



COMO (A,B) É ε-REGULAR, TEMOS $|X| < \varepsilon|A|$



A
v
d(v)
B
C

LEMA (LEMA DE IMERSÃO PARA TRIÂNGULOS)

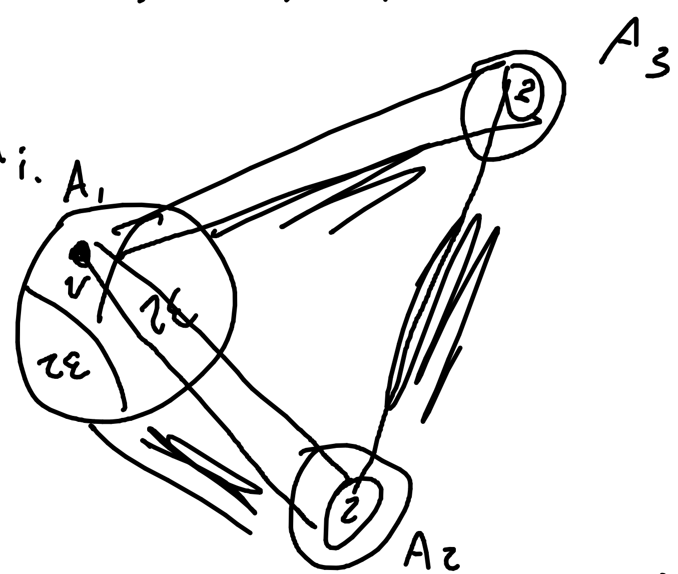
SEJA G UM GRAFO E SEJAM $\varepsilon > 0$ E $\delta > 0$ COM $\varepsilon < \frac{\delta}{4}$. SEJAM $A_1, A_2, A_3 \subseteq V(G)$ SUBCONJUNTOS DISJUNTOS NÃO VAZIOS, E SUPONHA QUE, PARA TODO $1 \leq i < j \leq 3$, O PAR (A_i, A_j) É ε-REGULAR COM DENSIDADE $d(A_i, A_j) \geq \delta$. ENTÃO $K_3 \subseteq G$.

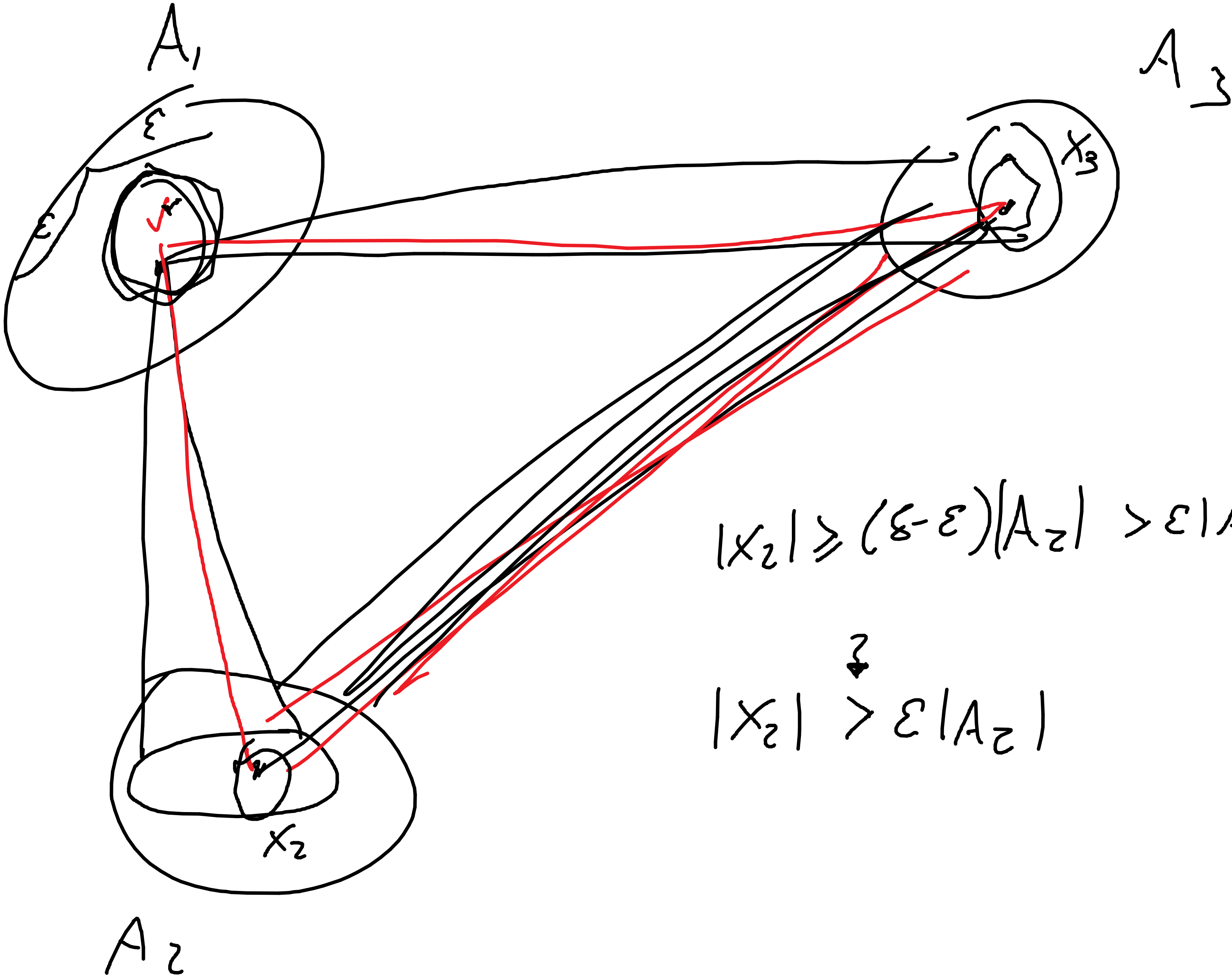
PROVA: COMO (A_1, A_2) E (A_1, A_3) SÃO ε-REGULARES E $\varepsilon < \delta/4 \leq \frac{1}{4}$, DECORRE DO LEMA ANTERIOR QUE EXISTE $v \in A_1$ COM PELO MENOS $\boxed{(\delta - \varepsilon)|A_i|}$ VIZINHOS EM A_i, $i \in \{2,3\}$.

SEJA X_i O CONJUNTO DE VIZINHOS DE v EM A_i.

COMO (A_2, A_3) É ε-REGULAR E $\delta - \varepsilon > \varepsilon$ TEMOS $|X_i| \geq (\delta - \varepsilon)|A_i| > \varepsilon |A_i|$ $i \in \{2,3\}$.

LOGO $d(X_2, X_3) \geq d(A, B) - \varepsilon = \delta - \varepsilon > 0$ E PORTANTO HÁ ARESTA EM $e(X_2, X_3)$



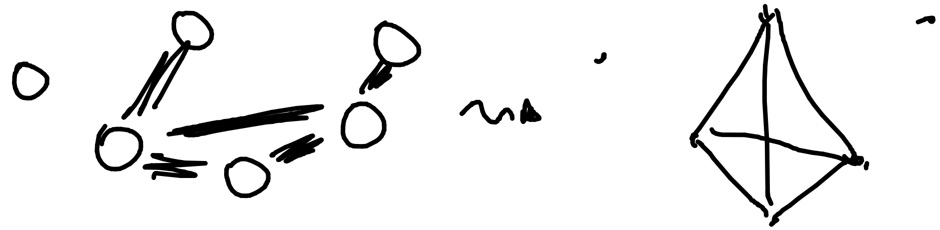


$$|X_2| \geq (\delta - \varepsilon)|A_2| > \varepsilon |A_2|$$

$$\Big\Downarrow ?$$

$$|X_2| > \varepsilon |A_2|$$

Lema de Contagem: Seja G um grafo, $m \in \mathbb{N}$ e sejam $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, com $\varepsilon < \frac{\delta}{8}$. Sejam $A_1, A_2, A_3 \subseteq V(G)$ conjuntos disjuntos de tamanho m, com (A_1, A_2), (A_1, A_3) e (A_2, A_3) ε-regulares com $d(A_i, A_j) \geq \delta$. Então G possui pelo menos $\frac{\delta^3 m^3}{4}$ triângulos.



Lema (Lema de Imersão para Cliques)

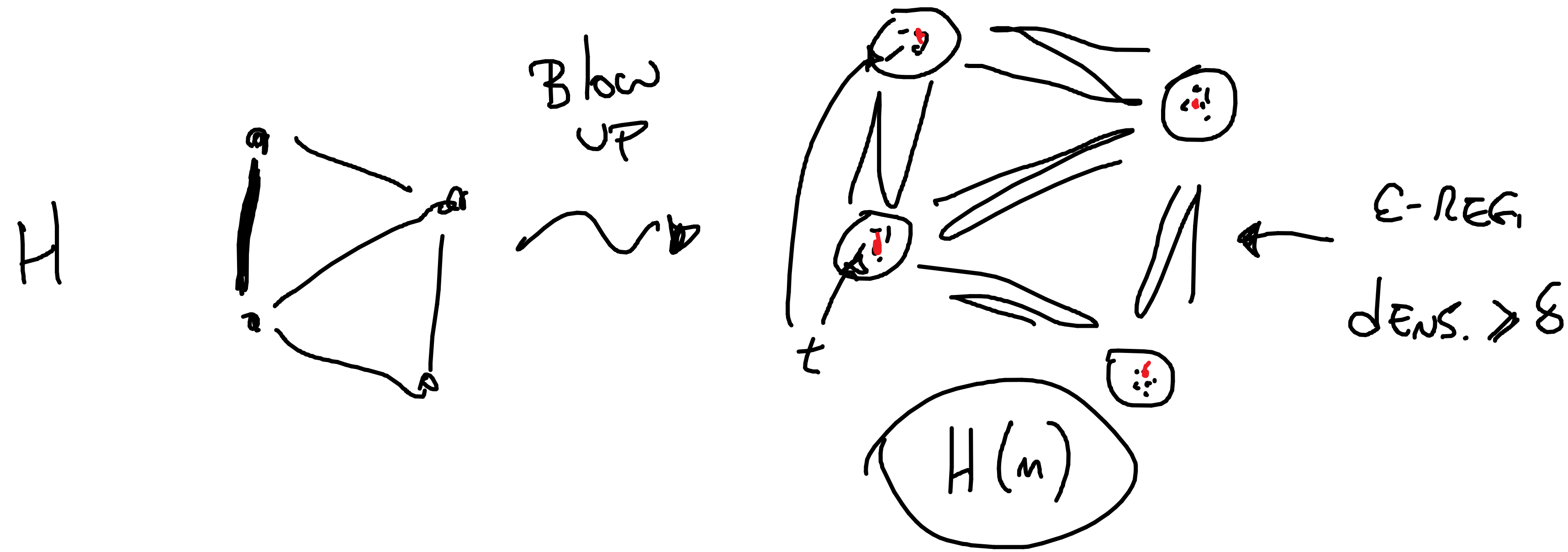
Seja G um grafo e sejam $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ com ε suf. peq. Sejam $A_1, \ldots, A_r \subseteq V(G)$ subconjuntos disjuntos não vazios, e suponha que, para todo $1 \leq i < j \leq r$, o par (A_i, A_j) é ε-regular com densidade $d(A_i, A_j) \geq \delta$.

Então $K_r \subseteq G$.

LEMA DE FATIAMENTO: SEJAM $\alpha \geqslant \varepsilon > 0$ E SEJA (A,B) UM PAR ε-REGULAR EM G. PARA $X \subseteq A$ E $Y \subseteq B$ COM $|X| \geqslant \alpha |A|$ E $|Y| \geqslant \alpha |B|$, O PAR (X,Y) É $\left(\frac{2\varepsilon}{\alpha}\right)$-REGULAR COM DENSIDADE $d(X,Y) \geqslant d(A,B) - \varepsilon$

Dado grafo H, $m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon, \delta > 0$, definimos $\mathcal{G}(H, m, \varepsilon, \delta)$ como a família de grafos G com a seguinte propriedade:

existe uma partição $V(G) = A_1 \cup \dots \cup A_\ell$ com $|A_i| = m$ e um rotulamento $V(H) = \{w_1, \dots, w_\ell\}$ t.q. para todo $w_i w_j \in E(H)$ o par (A_i, A_j) é ε-reg. com dens. pelo menos δ.



LEMA DE IMERSÃO: PARA TODO GRAFO H E TODO δ, EXISTEM $\varepsilon > 0$ E $M \in \mathbb{N}$ T.Q. SE $G \in \mathcal{G}(H, n, \varepsilon, \delta)$ PARA $n \geq M$, ENTÃO $H \subseteq G$.

LEMA (LEMA DA REGULARIDADE). PARA TODOS $\varepsilon > 0$ E $m \in \mathbb{N}$, EXISTE $M(\varepsilon, m)$ TAL QUE PARA QUALQUER GRAFO G EXISTE UMA PARTIÇÃO ε-REGULAR

$$V(G) = V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_k$$

NA QUAL $m \leq k \leq M$.

MUITA ARESTA

$$G' \subseteq G \xrightarrow{\text{PART.}} V_1 \cdots V_k \xrightarrow{\text{REDUZIDO}} H' \xrightarrow{\text{TEO TURÁN}} K_r \subseteq H'$$

$$\in \mathcal{G}(H', m', \varepsilon, \delta)$$

$$K_r \longrightarrow \mathcal{G}(K_r, m', \varepsilon, \delta)$$