TEOREMA DE ERDŐS - STONE:

Para todo grafo H,

$$ex(n, H) = \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} + o(1)\right)\frac{n^2}{2}$$

quando $n \to \infty$.

Esboço:

1) Aplica o lema da regularidade com ε e $m = \frac{1}{\varepsilon}$, obtemos $M(m, \varepsilon)$ $\overset{M}{\shortparallel}$

2) G pode admite partição ε-reg. $V_0 \cup \underset{1}{V_1} \cup \underset{2\cdots}{\cdots} \cup \underset{K}{V_K}$, com $\overset{m}{\shortparallel}\frac{1}{\varepsilon} \leq K \leq M$

3) Definimos o grafo reduzido R_δ $\quad n' = |V_1| = \cdots = |V_K|$

$$E(R_\delta) = \left\{ ij : \text{o par } (V_i, V_j) \text{ é } \varepsilon\text{-reg. com dens. pelo menos } \delta \right]$$

Logo $G' = G \setminus V_0 \in \mathcal{G}(R_\delta, n', \varepsilon, \delta)$.

ESBOÇO:

1) Aplica o Lema da Regularidade com ε' e $m = \frac{1}{\varepsilon'}$, obtemos $M(m, \varepsilon') = M$

2) G pode admite partição ε-reg. $V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_k$, com $m = \frac{1}{\varepsilon} \leq k \leq M$

3) Definimos o grafo reduzido R_δ $\quad$ $1 \; 2 \cdots k$

$$m' = |V_1| = \cdots = |V_k|$$

$$E(R_\delta) = \left\{ ij : \text{o par } (V_i, V_j) \text{ é } \varepsilon\text{-reg. com dens. pelo menos } \delta \right\}$$

Logo $G' = G \setminus V_0 \in \mathcal{G}(R_\delta, m', \varepsilon, \delta)$.

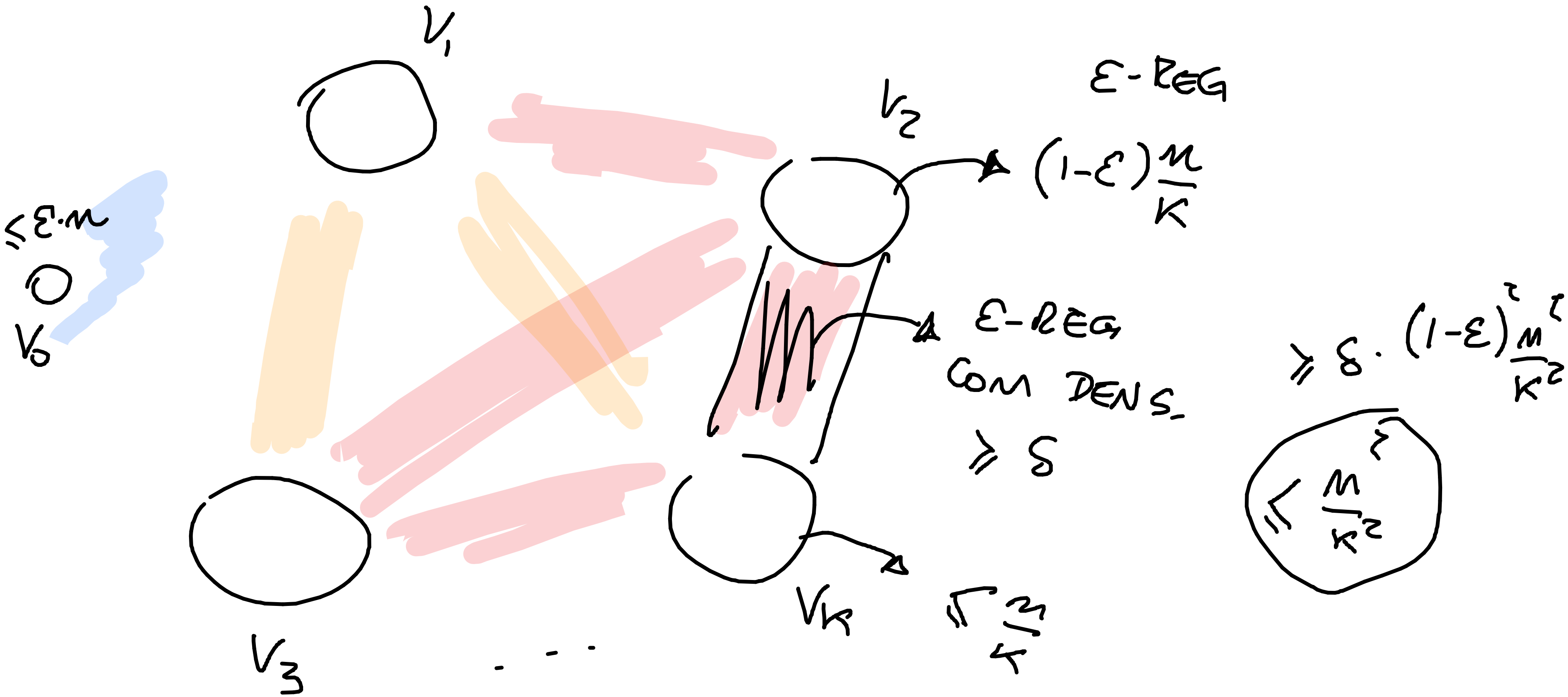
4) Se R contém cópia de K_{r+1}, pelo lema de imersão, $H \subseteq G' \subseteq G$

$r+1 = \chi(H)$

<u>Lema de Imersão</u>: Para todo grafo H e todo δ, existem $\varepsilon > 0$ e $M \in \mathbb{N}$ t.q. se $G' \in \mathcal{G}(K_r, m, \varepsilon, \delta)$ para $m \geq M$, então <u>$H \subseteq G$</u>, em que $r = \chi(H)$.

5) Se R é K_{r+1}-livre, então pelo Turán $e(R) \leq \left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{k^2}{2}$

5) Se R é K_{r+1}-livre, então pelo Turán $e(R) \leq t_r(k) = \left(1-\frac{1}{r}\right)\frac{k^2}{2}$



(i) $|V_0| \leq \varepsilon \cdot m$

(ii) é se no máximo εk^2 pares (V_i, V_j) com $1 \leq i < j \leq m$
não são ε-regulares.

$e(G) \leq e(R) \cdot \frac{m^2}{k^2}$ + ARESTAS QUE JOGUEI FORA $\leq \left(1-\frac{1}{r}\right)\frac{\cancel{k^2}}{2} \cdot \frac{m^2}{\cancel{k^2}}$ + ARESTAS QUE JOGUEI FORA

Lema: Seja $V(G) = V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_k$ uma partição ε-reg. de G.

Se $k \geq \frac{1}{\varepsilon} = m$, então há no máximo

(a) εm^2 arestas com um vtx em V_0

Prova: $|V_0| \leq \varepsilon m$ e $d(u) \leq m$ $\forall u \in V(G)$.

(b) εm^2 arestas dentro das partes $V_1, \ldots, V_k$ $\quad k \geq \frac{1}{\varepsilon}$

Prova $e(V_i) \leq \binom{m/k}{2} < \frac{m^2}{k^2}$. Logo $\sum_i e(V_i) \leq k \cdot \frac{m^2}{k^2} = \frac{m^2}{k} \leq \varepsilon m^2$

(c) εm^2 arestas entre pares (V_i, V_j) que não são ε-reg,

Prova: εk^2 pares que não são ε-reg : $\varepsilon k^2 \cdot \frac{m^2}{k^2} = \varepsilon m^2$

(d) δm^2 arestas entre pares com $d(V_i, V_j) < \delta$

$< k^2 \cdot \delta \frac{m^2}{k^2} = \delta m^2$

Obs: Ao todo, removemos $(3\varepsilon + \delta) m^2$ arestas

$e(G) \leq e(R)\cdot\frac{n^2}{k^2}$ + ARESTAS QUE JOGUEI FORA $\leq \left(1-\frac{1}{r}\right)\frac{\cancel{k^2}}{2}\cdot\frac{n^2}{\cancel{k^2}}$ + ARESTAS QUE JOGUEI FORA

$(3\varepsilon+\delta)n^2$

$$= \left(1-\frac{1}{r}+\underbrace{2(3\varepsilon'+\delta)}_{\varepsilon}\right)\frac{n^2}{2}$$

Prova (Erdős-Stone): Seja $\delta > 0$, pelo lema de imersão, obtemos ε e M_1. Seja G um grafo t.q.

$$e(G) \geqslant \left(1 - \frac{1}{r} + 3\delta\right)\frac{n^2}{2}$$

> **Lema de Imersão:** Para todo grafo H e todo δ, existem $\varepsilon > 0$ e $M \in \mathbb{N}$ t.q. se $G' \in \mathcal{G}(K_r, n, \varepsilon, \delta)$ para $n \geqslant M$, então $H \subseteq G$, em que $r = \chi(H)$.

com $r = \chi(H) - 1$.

Pelo lema da regi. com ε e $m = \frac{1}{\varepsilon}$, G admite partição ε-regi.

$$\underbrace{V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_k}$$

com $m \leqslant k \leqslant M_2$.

Seja R o grafo reduzido (com aresta ij t.q. (V_i, V_j) é ε-reg, $d(V_i, V_j) > \delta$)

Se $K_{r+1} \subseteq R$, então há partes $A_1, \ldots, A_{r+1}$ t.q. (A_i, A_j) é ε-regi. $d(A_i, A_j) > \delta$

Então $G' = G[A_1 \cup \cdots \cup A_{r+1}] \in \mathcal{G}(K_{r+1}, n', \varepsilon, \delta)$. Logo, $H \subseteq G'$.

SE R É K_{r+1}-LIVRE, O TEO. DE TURÁN GARANTE QUE

$$e(R) \leq \left(1 - \frac{1}{r}\right)\frac{k^2}{2}$$

LOGO, $e(G) \leq e(R) \cdot \frac{n^2}{k^2} + (3\varepsilon + \delta) n^2$

$$\leq \left(1 - \frac{1}{r}\right)\frac{k^2}{2}\frac{n^2}{k^2} + (3\varepsilon + \delta) n^2$$

$$\leq \left(1 - \frac{1}{r} + \underbrace{2(3\varepsilon + \delta)}_{3\delta}\right)\frac{n^2}{2}$$

$6\varepsilon \leq \delta$

$\blacksquare$

Teorema de Roth. Para todo $\varepsilon > 0$ existe n_0 t.q. se $n \geq n_0$ e $A \subseteq [n]$ com $|A| > \varepsilon n$, então A contém uma 3-PA

Lema de Remoção de Triângulos. Para todo $\alpha > 0$, existe $\beta > 0$ t.q. todo grafo com n vértices e no máximo βn^3 triângulos, pode se tornar K_3-livre pela remoção de αn^2 arestas.

Prova: $0 < \delta < \frac{\alpha}{3}$ e $\varepsilon = \delta/9$. Pelo lema da Reg. com ε e $m = \frac{1}{\varepsilon}$

Obtemos uma part. ε-reg. $V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_k$ com $\frac{1}{\varepsilon} \leq k \leq M(\varepsilon, m)$

Definimos R como anteriormente.

Se R contém triângulo, temos partes A_1, A_2, A_3 correspondentes

Lema de Remoção de Triângulos. Para todo $\alpha > 0$, existe $\beta > 0$ t.q. todo grafo com n vértices e no máximo βn^3 triângulos, pode se tornar K_3-livre pela remoção de αn^2 arestas.

Prova: $0 < \delta < \frac{\alpha}{3}$ e $\varepsilon = \delta/9$. Pelo lema da Reg. com ε e $m = \frac{1}{\varepsilon}$

Obtemos uma Part. ε-Reg. $V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_k$ com $\frac{1}{\varepsilon} \leq k \leq M(\varepsilon, m)$

Definimos R como anteriormente. $\geq (1-\varepsilon)\frac{n}{k}$

Se R contém triângulo, temos partes A_1, A_2, A_3 correspondentes

Pelo lema de Contagem, G possui pelo menos

$$\frac{\delta^3}{4}\left((1-\varepsilon)\frac{n}{k}\right)^3 \geq \frac{\delta^3}{4}(1-\varepsilon)^3 \cdot \frac{n^3}{M^3} > \beta n^3$$

β

$k \leq M$

$\frac{1}{k} \geq \frac{1}{M}$

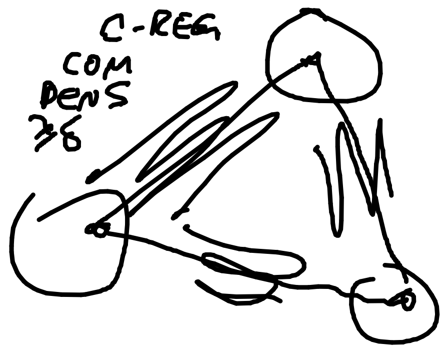
Lema de Contagem: Seja G um grafo, $m \in \mathbb{N}$ e sejam $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, com $\varepsilon < \frac{\delta}{8}$. Sejam $A_1, A_2, A_3 \subseteq V(G)$ conjuntos disjuntos de tamanho m, com (A_1, A_2) (A_1, A_3) e (A_2, A_3) ε-regulares com $d(A_i, A_j) \geq \delta$. Então G possui pelo menos $\frac{\delta^3 m^3}{4}$ triângulos.

SE R NÃO POSSUI TRIÂNGULO, GOSTARIA DE REMOVER TODOS OS TRIÂNGULOS DE G.

$0<\delta<\frac{\alpha}{3}$ e $\varepsilon=\delta/9$.

PARA OBTER R REMOVEMOS $(3\varepsilon+\delta)n^2$ ARESTAS OBTENDO UM GRAFO $G'\subseteq G$.

$$\frac{\delta}{3}+\delta<\frac{\alpha}{9}+\frac{\alpha}{3}<\alpha$$



AF: G' É K_3-LIVRE.

MAS SE EXISTE TRIÂNGULO $\{u,v,w\}$ EM G', ENTÃO EXISTE TRIÂNGULO EM R.

Prova (Teo. Roth). Suponha que $|A| \geq \varepsilon n$

Definimos um grafo G com $V(G) = X \cup Y \cup Z$

em que X, Y, Z são disjuntos com $|X| = |Y| = |Z| = 3n$

Cada parte é uma "cópia" de $[3n]$.

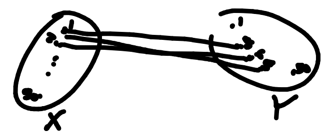
$4 \in A$ $\quad n = 10$

7

As arestas de G são

- $E(X,Y) = \{ xy : x \in X,\ y \in Y$ e $y = x + a$ para $a \in A \}$
- $E(Y,Z) = \{ yz : y \in Y,\ z \in Z$ e $z = y + a$ para $a \in A \}$
- $E(X,Z) = \{ xz : x \in X,\ z \in Z$ e $z = x + 2a$ para $a \in A \}$

$4 \in A \quad x = 1,\ y = 5,\ z = 9$

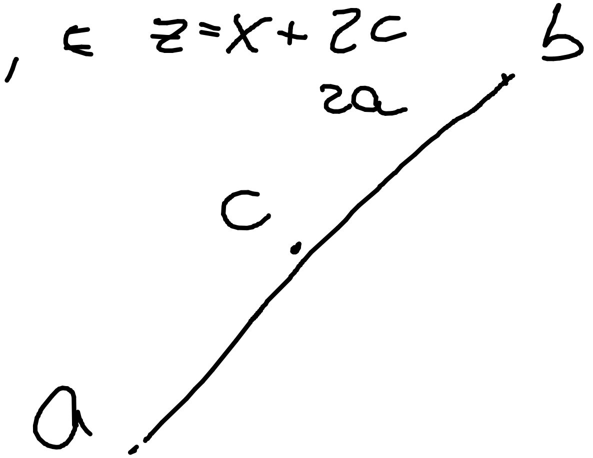


- $E(X,Y) = \{xy : x \in X, y \in Y$ e $y = x + a$ para $a \in A\}$
- $E(Y,Z) = \{yz : y \in Y, z \in Z$ e $z = y + a$ para $a \in A\}$
- $E(X,Z) = \{xz : x \in X, z \in Z$ e $z = x + 2a$ para $a \in A\}$

Quantos triângulos G contém? Se $\{x, y, z\}$ é triângulo em G

existem $a, b, c \in A$ t.q. $y = x + a$, $z = y + \underset{a}{b}$, e $z = x + \underset{2a}{2c}$

Af. a, c, b é 3-PA



$a = y - x$, $c = \dfrac{z - x}{2}$, $b = z - y$ a

$a + b = z - x = \underline{2c}$ $\qquad c = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{b-a}{2}$

3-PA: $d \overset{r}{,} e \overset{r}{,} f$ $\quad e = d + r$, $f = e + r = d + 2r$

Se A não contém 3-PA, então os únicos triângulos de G são os triângulos com $a = b = c$, mas há no máximo

$$|A|$$

$$3n \cdot |A| \leq 3n^2 = o(n^3) \leq \beta n^3$$

Pelo lema de remoção de triângulos, podemos remover todos os triângulos de G com a remoção de no máx $\alpha \cdot n^2$ arestas.

Temos pelo menos $n \cdot |A| \geq \varepsilon n^2$ triplas triviais. $\blacksquare$