

Lista 1 de Combinatória Extremal e Probabilística - 2022.02

Data de entrega: 26/07/2022

Exercício 1. Mostre que, para todo $n, k \in \mathbb{N}$,

$$\left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{n^2}{2} - n \leq t_k(n) \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{n^2}{2}$$

Exercício 2. Mostre que se T é uma árvore com k vértices e G é um grafo com $4k - 1$ vértices, então ou $T \subset G$ ou o complemento de G contém um triângulo.

Exercício 3. Seja G um grafo com n vértices. Prove o seguinte teorema da supersaturação fraca: se

$$e(G) \geq 2 \cdot ex(n, H),$$

então G contém pelo menos $ex(n, H)$ cópias de H .

Exercício 4.

Definição: Dado inteiro positivo $r \geq 1$, a coroa K_r^* é o grafo obtido do grafo bipartido completo $K_{2,r}$ com bipartição $(\{u, v\}, R)$ ao adicionarmos a aresta uv . Neste caso, os vértices R são chamados de folhas da coroa, e u e v são os centros da coroa. Equivalentemente K_r^* é o grafo obtido da aresta uv ao adicionarmos r novos vértices adjacentes tanto a u quanto a v .

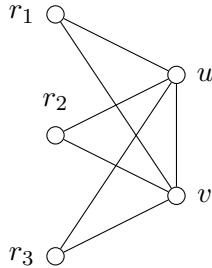


Figura 1: Exemplo de uma coroa K_3^*

Suponha que $ex(10, C_5) = 25$ e que G é um grafo C_5 -livre tal que $e(G) > \frac{n^2}{4}$, mostre que:

- Existe pelo menos uma coroa em G (Dica: Note que K_3 é a coroa K_1^*).
- G é K_4 -livre.
- Se K é uma coroa de G com o maior número de folhas possível, então G tem no máximo um vizinho em K .
- $e(G) \leq \frac{n^2}{4}$.