Lista 5 de Complexidade de Algoritmos - 2019.03

Data de entrega: 13/12/2019

Dado um grafo não-orientado $G = (V, E)$, diz-se que um subconjunto de vértices U é uma *cobertura* se toda aresta de E tem pelo menos umas das extremidades em U.

1. Dê um algoritmo 2-aproximativo A para o problema de cobertura de vértices em grafos simples. Existe uma instância I tal que $val(A(I)) < 2opt(I)$?

Problema *Escalonamento*(m,n,t): Dados inteiros positivos m,n e um tempo t_i em $\mathbb{Q}_{\geq}$ para cada i em $\{1, \ldots, n\}$, encontrar uma partição $\{M_1, \ldots, M_m\}$ de $\{1, \ldots, n\}$ que minimize $max_j t(M_j)$. $\mathbb{Q}_{\geq}$ é o conjunto dos racionais não negativos. (Problema do escalonamento de máquinas).

Considere o algoritmo de Graham:

Algoritmo *Escalonamento-Graham*(m,n,t)

para j de 1 a m faça $M_j \leftarrow \emptyset$
para i de 1 a n faça
    seja k uma máquina tal que $t(M_k)$ é mínimo
    $M_k \leftarrow M_k \cup \{i\}$
devolva $\{M_1, \ldots, M_m\}$

2. Mostre que o algoritmo *Escalonamento-Graham*(m,n,t) tem razão de aproximação $2 - \frac{1}{m}$. Para cada m, exiba uma instância para a qual o algoritmo produz um escalonamento que atinge tal razão em relação ao ótimo.

3. Seja um algoritmo Monte Carlo de erro unilateral com taxa de erro inversamente proporcional à raiz quadrada de n, onde n é o tamanho da entrada do problema. Para instâncias onde $n = 64$, sabe-se que o algoritmo acerta com a probabilidade $\frac{39}{40}$. Quantas vezes, no máximo, é preciso executar esse algoritmo, para garantir probabilidade de acerto tão boa quanto $1 - 10^{-8}$ para uma instância de tamanho $n = 400$?

4. A desigualdade de Markov nos diz que, para toda variável aleatória não-negativa X e todo real positivo a, vale $Prob\{X \geq a\} \leq E[X]/a$, onde $E[X]$ indica a esperança de X.

   Seja um problema de decisão Π. Você possui dois algoritmos de Monte Carlo de erro unilateral para o problema Π: um baseado no *Sim*, que responde *Não* com probabilidade menor ou igual a 0.1 quando a resposta correta é *Sim*, e outro baseado no *Não*, que corresponde *Sim* com probabilidade menor ou igual a 0.1 quando a resposta correta é *Não*. Ambos rodam em tempo linear no tamanho da lista de entrada, isto é, a complexidade de ambos os algoritmos é $O(n)$, onde n é o tamanho da lista de entrada.

   (a) Escreva um algoritmo de Las Vegas eficiente para Π

   (b) Qual é o tempo esperado (assintótico) do seu algoritmo?

   (c) Qual é o tempo máximo que o teu algoritmo pode levar em sua execução?

(d) Seja $f(n)$ a função que dá a probabilidade de que seu algoritmo leve tempo maior do que o quadrado de n para um entrada de tamanho n para o problema Π. Podemos dizer que $f(n) = O(1/n)$?

5. Considere a distribuição uniforme e independentes de n bolas em m latas.

   (a) Qual o número esperado de latas vazias?

   (b) Mostre que, para n grande e $m = n$, o número esperado de latas vazias converge para $\frac{n}{e}$, onde e é a base dos logaritmos naturais.

Observação. Por favor, a resolução de cada questão deve ser iniciada em uma folha de papel separada das folhas utilizadas para descrever a resolução das demais questões. Além disso, antes do início de cada questão, deve-se incluir o número da questão e o nome completo do aluno.

Esta lista foi publicada em 22/11/2019.