# O problema do caixeiro viajante
## Traveling Salesman GJ [ND22]

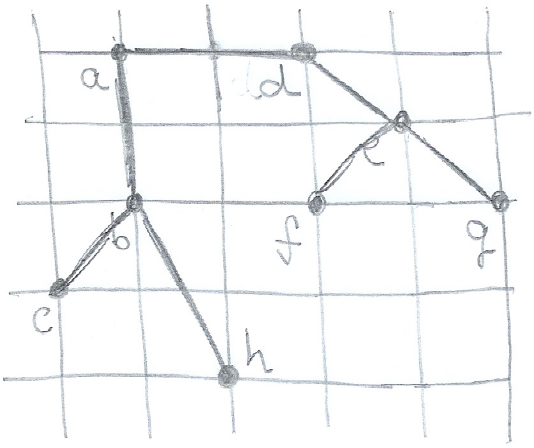
Determinar uma rota de comprimento mínimo que passe exatamente uma vez em cada um dos pontos de um conjunto dado.

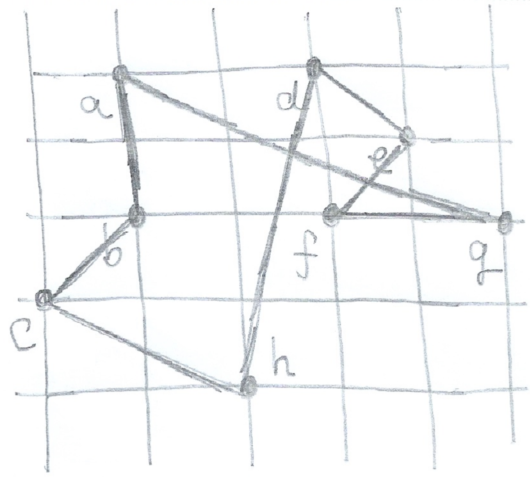
TSP $(G, c)$: Dados um grafo $G$ e um custo positivo para cada aresta, determinar um circuito hamiltoniano $C$ que minimize $c(C)$.

Caixeiro viajante métrico: suponha $G$ grafo completo e os custos satisfazem a desigualdade triangular $c_{ik} \leq c_{ij} + c_{jk}$, para quaisquer três vértices $i$, $j$ e $k$.

2 algoritmos aproximativos com estratégia:

1. construa árvore geradora mínima $T$;
2. acrescente aresta a $T$ obtendo $T'$ cujos vértices têm grau par;
3. obtenha ciclo euleriano $P$ em $T'$;
4. obtenha circuito hamiltoniano a partir de $P$.




a função de custo é a distância euclideana.

MST-Prim considerando vértices em ordem alfabética seleciona:
ab, bc, ad, de, ef, eg, bf

a partir da raiz a percorremos os vértices em pré-ordem
a b c b h b a d e f e g e d a
listamos só o primeiro encontro de cada vértice
a b c h d e f g

Este algoritmo é conhecido como RSL Rosenkrantz, Stearns e Lewis

Teorema: O algoritmo TSPM-RSL é uma 2-aproximação polinomial.

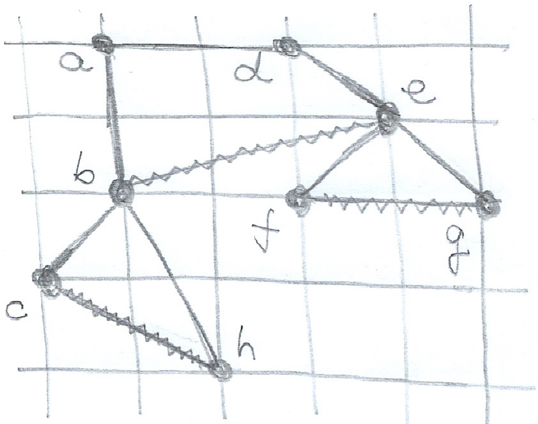
prova: $c(C) \leq c(P) = 2\,c(T) \leq 2\,opt(G,c)$

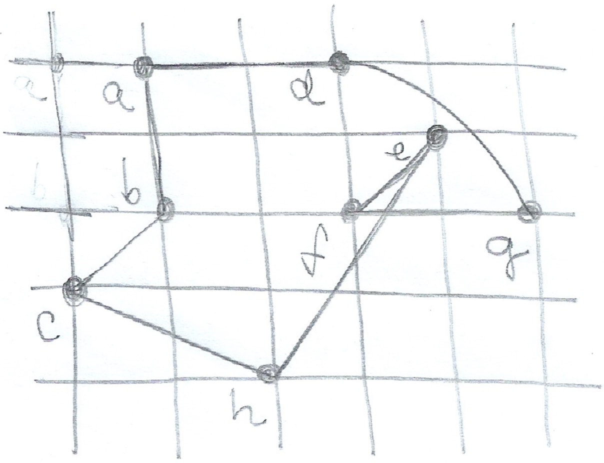
desigualdade triangular

duplicação de arestas

a última desigualdade vem do limite inferior $c(T) \leq opt(G,c)$. ☒

A4.3




ciclo euleriano:
a b c h b e f g e d a
circuito hamiltoniano:
a b c h e f g d a

A única mudança foi na definição de P onde os graus são pares.

# Algoritmo TSPM- Christofides (G,c)

1. $T \leftarrow$ MST (G,c)
2. seja I o conjunto dos vértices de grau ímpar de T
3. seja M um emparelhamento perfeito mínimo do subgrafo G[I]
4. $T' \leftarrow T + M$
5. $P \leftarrow$ Euler (T')
6. $C \leftarrow$ atalho (P)
7. retorne C

Teorema: O algoritmo TSPM-Cristofides é uma $\frac{3}{2}$-aproximação polinomial.

Prova: Pela desigualdade triangular,

$$c(C) \leq c(P).$$

Por outro lado, pela construção de $T'$,

$$c(P) = c(T') = c(T) + c(M).$$

Usando a desigualdade do limite inferior,

$$c(T) \leq opt(G,c)$$

concluímos

$$c(C) \leq opt(G,c) + c(M).$$

Para obter a razão $\frac{3}{2}$, usamos um outro limite inferior: $2c(M) \leq opt(G,c)$.

Seja $C^*$ um circuito ótimo e considere $I$ na ordem em $C^*$ obtendo circuito par $D$.

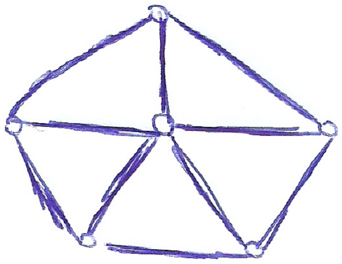
Pela desigualdade triangular $c(D) \leq c(C^*)$.

$E(D) = M' \cup M''$ união de dois emparelhamentos perfeitos: $2c(M) \leq c(M') + c(M'') = c(D)$. $\boxtimes$

As nossas análises são justas?
Ou existem instâncias I cujo valor retornado pelo algoritmos satisfazem

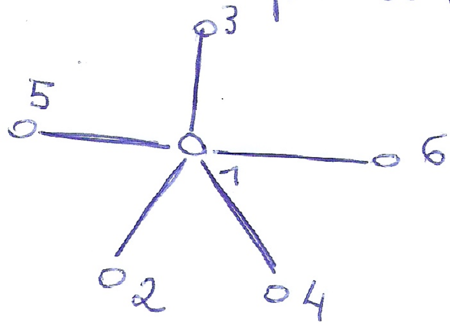
$$val(A(I)) = \alpha\, opt(I) \quad ?$$

Exemplo para RSL



Grafo completo com $n$ vértices e custos das arestas 1 e 2. Veja ao lado $n=6$. Temos $2(n-1)$ arestas com custo 1 e as outras têm custo 2.

Suponha que a MST é umas estrela criada pelas arestas de custo 1.

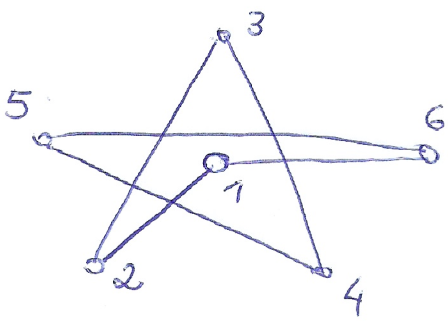



e suponha que P visita na ordem

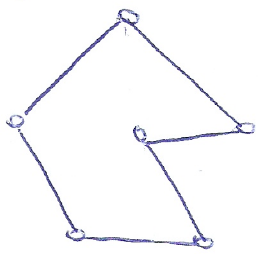
1 2 1 3 1 4 1 5 1 6 1

o ciclo retornado será

1 2 3 4 5 6 1

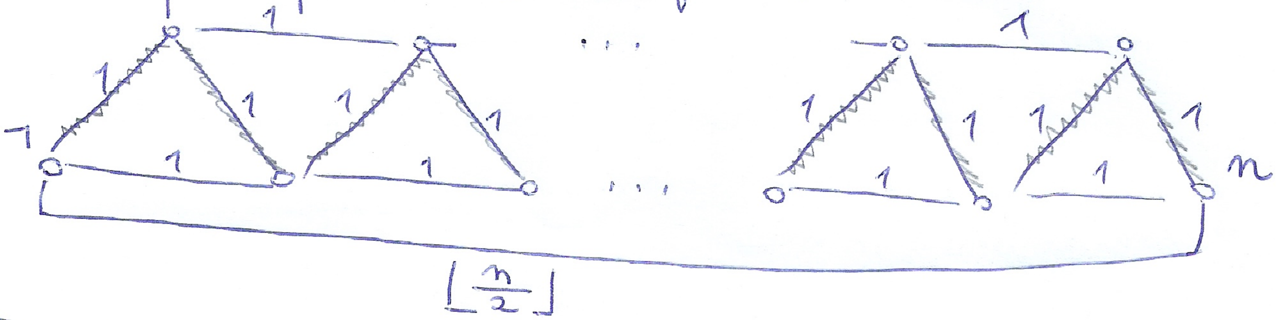



mas o ótimo é e tem custo $n$



enquanto que o retornado tem $n-2$ arestas de custo 2 e custo total $2n-4+2 = 2n-2$.

Exemplo para Cristofides




Grafo com n vértices. Suponha que a MST é o caminho com n vértices marcado, que só tem dois vértices com grau 1, logo M é a aresta com peso $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Portanto o circuito retornado C tem custo $(n-1) + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, enquanto que o ótimo tem custo $n$.

---

Por que precisamos da desigualdade triangular?

É possível desenvolver um algoritmo aproximativo para TSP?

Teorema TSP não pode ser aproximado por uma razão $\alpha$, a menos que P=NP.

prova: Assuma que exista uma $\alpha$-aproximação para TSP. Vamos usar o algoritmo aproximativo para descrever um algoritmo ~~aproximativo~~ polinomial para circuito hamiltoniano.

Seja G um grafo com n vértices, defina a partir de G um grafo completo com n vértices e pesos nas arestas atribuindo custo 1 às arestas de G e custo $n\alpha$ às arestas que faltam em G. Um circuito ótimo no grafo completo tem custo n se e somente se G tem circuito hamiltoniano. Além disso, qualquer circuito no grafo completo contendo aresta nova tem custo maior que $n\alpha$. Portanto uma $\alpha$-aproximação encontra um circuito de custo n quando ele existe. $\boxtimes$