Redução a um núcleo

Para provar que um problema Π é FPT, buscamos um algoritmo de tempo $f(k)\, n^c$.

Uma técnica para classificar Π como FPT é a redução a um núcleo do problema.

Reduzir em tempo polinomial uma instância I do problema Π a uma instância I', tal que o tamanho de I' seja limitado por uma função do parâmetro k, independente do tamanho de I.

I' constitui o núcleo do problema com tamanho limitado.

I' pode ser exaustivamente analisada e sua solução pode ser apresentada como uma solução para I.

kernelization

uma formalização de pré-processamento

Se a instância $I = (x, k)$, onde x é a entrada e k é o parâmetro, então o núcleo de I é uma instância $I' = (x', k')$, tal que $|x'| \leq g(k)$ e $k' \leq g(k)$, onde g é uma função que só depende de k,
e tal que I é uma instância SIM se e somente se I' é uma instância SIM.

Desejamos uma transformação f tal que $f(I) = I'$ satisfaz I é instância SIM se e somente se I' é instância SIM. Queremos f polinomial em $|x|$ e k, e chamamos a transformação de redução f: regras de redução ou algoritmo de redução.

A6-3

Um núcleo para Cobertura de Vértices.

Seja (G, k) uma instância do problema Cobertura de vértices parametrizado pelo tamanho da cobertura, onde G é o grafo e k é o parâmetro.

Um vértice é isolado se não possui aresta incidente, logo não participa de uma cobertura mínima já que não cobre nenhuma aresta.

Regra de redução 1 Se (G, k) é uma instância do problema de Cobertura de vértices parametrizado e o grafo G contém um vértice isolado v, então remova v de G, obtendo uma nova instância $(G - v, k)$.

Seja v um vértice de grau alto, isto é $d(v) \geq k+1$. Todas as arestas incidentes a v precisam ser cobertas, logo se v não está na cobertura, então $N(v)$ está todo na cobertura, o que é impossível porque $|N(v)| \geq k+1$. Concluímos que o vértice de grau alto precisa estar na cobertura.

Regra de redução 2 Se (G, k) é uma instância do problema de cobertura de vértices parametrizado e o grafo G contém um vértice v com $d(v) \geq k+1$, então remova v de G e reduza uma unidade de k, obtendo uma nova instância $(G-v, k-1)$

A6-5

Aplicando as Regras de redução 1 e 2 sucessivamente até não ser mais possível, obtemos como instância resultante um grafo com grau máximo no máximo k, porque a existência de v com $d(v) > k$ permite a Regra 2.

Para obter o núcleo, a última regra conclui que temos uma instância NÃO.

Regra de redução 3 Se (G, k) é uma instância do problema de cobertura de vértices parametrizado tal que as Regras de redução 1 e 2 não podem ser mais aplicadas e alguma das condições abaixo é satisfeita, então I é uma instância NÃO:

(i) $k < 0$; (ii) G possui mais de $k^2 + k$ vértices; (iii) G possui mais de k^2 arestas.

prova: se $k < 0$, então como a diminuição de uma unidade corresponde a adição de vértice a cobertura, temos que já foram adicionados $k+1$ vértices a cobertura ultrapassando o limite.

Para o limite no número de arestas, observamos que com k vértices, num grafo onde o grau máximo é k, podemos cobrir no máximo k^2 arestas.

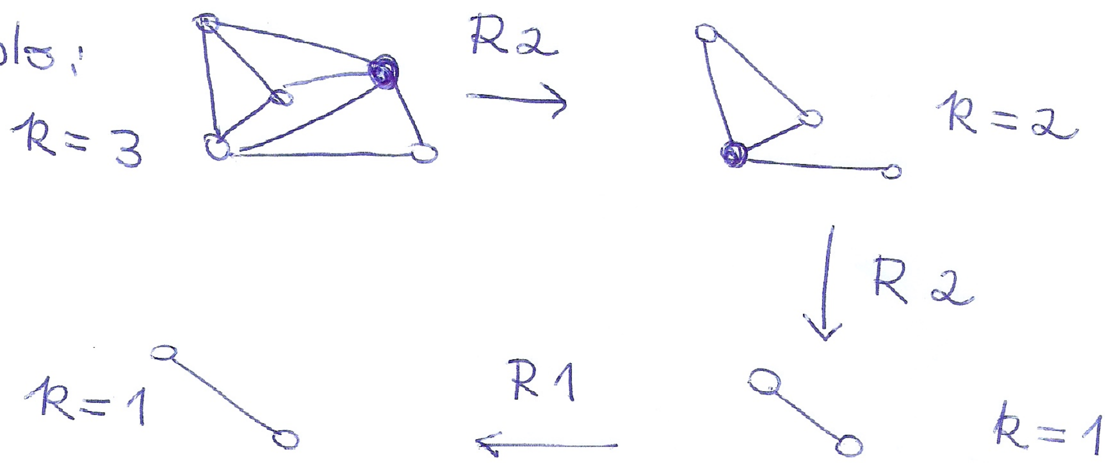
Para o limite no número de vértices, observamos que cada vértice tem grau pelo menos 1 pela Regra 1, e toda aresta deve ser coberta, logo todo vértice pertence a cobertura ou tem vizinho na cobertura. A cobertura tem no máximo k vértices e cada vértice tem no máximo k vizinhos fora da cobertura, e todos os vértices do grafo se encontram numa das duas situações, o limite é $k + k^2$. ▧

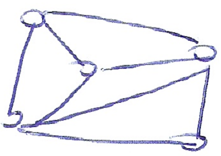
A6-7

Teorema O problema de cobertura de vértices admite um núcleo com no máximo $O(k^2)$ vértices e $O(k^2)$ arestas.

prova: Após a aplicação das regras, ou concluímos que a instância é NÃO, através da Regra 3, ou teremos uma instância cujo tamanho é $O(k^2)$. $\blacksquare$

Exemplo:



I = ( , k) $\xrightarrow{f}$ I' = ( , k−2)

I é SIM $\iff$ I' é SIM