Segunda prova de Complexidade - Gabarito

Q1 a) Se $A(I)=S$, $val(S)=160$ e $val(S) \leq \frac{8}{5} opt(I)$, e como $opt(I)$ é o mínimo, então $\boxed{100 \leq opt(I) \leq 160}$

b) Nenhuma solução viável pode ter valor inferior a 100, portanto $\boxed{\text{não}}$ existe solução viável T satisfazendo $val(T)=80$.

Se $B(I)=X$, $val(X)=320$ e $val(X) \leq 2opt(I)$ então $opt(I) \geq 160$. Obtemos de (a) que $opt(I)=160$ e $\boxed{\text{é possível}}$ $val(X)=320$.

c) Se $B(I)=Y$, $val(Y)=120$, então $60 \leq opt(I) \leq 120$ e usando o intervalo obtido em (a): $\boxed{100 \leq opt(I) \leq 120}$

Q2 Seja K a classe de grafos com k limitado e seja D a classe de grafos com d limitado e $K \subseteq D$, se temos solução eficiente para grafo na classe D, então temos também para grafo em K.

Conclusão: (a) Falsa (b) Verdadeira.

Q3 Basta fazer (b). O melhor escalonamento é obtido nas 2m ordens, onde a tarefa de tempo m ocupa a posição t_k, $\boxed{1 \leq k \leq 2m}$

O pior escalonamento é obtido $\boxed{\text{apenas}}$ com a ordem onde a tarefa de tempo m é a ~~primeira~~ última.

O menor valor é $m+1$ e o maior é $2m$.

QUESTÃO 4:(2.5 pontos) Considere o problema `3-SAT` que vimos ao estudarmos problemas NP-Completos. Lembre-se que uma instância de `3-SAT` é uma expressão booleana na forma normal conjuntiva na qual cada cláusula possui exatamente três literais como abaixo

$$(x_0 \vee x_1 \vee \overline{x_4}) \wedge (x_4 \vee x_2 \vee x_0) \wedge (\overline{x_4} \vee x_3 \vee \overline{x_1}) \wedge (x_3 \vee \overline{x_2} \vee x_0)$$

a) Fixada uma clausula C qualquer, qual a probabilidade de satisfazermos C se escolhermos uma atribuição de suas variáveis aleatoriamente?

   Resposta. Seja E uma expressão booleana com n variáveis $x_1, \ldots, x_n$ e m cláusulas, cada uma contendo três variáveis. Seja $C = (y_i \vee y_j \vee y_k)$ uma cláusula qualquer, em que $y_l \in \{x_l, \overline{x_l}\}$ para $l \in \{i, j, k\}$. Para que C não seja satisfeita por uma atribuição das variáveis $x_1, \ldots, x_n$, devemos ter $y_i = y_j = y_k = F$, enquanto as demais variáveis não relacionadas a C podem receber tanto F quanto T. Isso implica que o número de atribuições de $x_1, \ldots, x_n$ que não satisfazem C é precisamente 2^{n-3}. Como há 2^n atribuições possíveis para $x_1, \ldots, x_n$, o número de atribuições que satisfazem C é $2^n - 2^{n-3} = 2^n(1 - \frac{1}{8}) = \frac{7}{8} \cdot 2^n$. Logo, a probabilidade de satisfazermos C ao escolhermos uma atribuição de $x_1, \ldots, x_n$ ao acaso é $7/8$.

b) Mostre que para cada instância de `3-SAT` existe uma atribuição de suas variáveis que satisfaz pelo menos $7/8$ das cláusulas.

   Resposta. Seja E uma expressão booleana com n variáveis $x_1, \ldots, x_n$ e m cláusulas $C_1, \ldots, C_m$, cada uma contendo três variáveis. Seja $w_1, \ldots, w_n$ uma atribuição aleatória das variáveis $x_1, \ldots, x_n$ e, para cada clausula $i \in \{1, \ldots, m\}$, seja X_i a variável indicadora tal que $X_i = 1$ se C_i é satisfeita, e $X_i = 0$ se C_i não é satisfeita. Como X_i é uma variável indicadora, temos que o valor esperado de X_i é precisamente sua probabilidade de sucesso, que pela questão a) vale $7/8$. Em outras palavras, $E(X_i) = 7/8$. Claramente, o número de clausulas satisfeitas é $X = \sum_{i=1}^{k} X_i$. Logo, pela linearidade da esperança, o valor esperado de X, i.e., $E(X)$ é

$$E(X) = E(\sum_{i=1}^{m} X_i) = \sum_{i=1}^{m} E(X_i) = \sum_{i=1}^{m} \frac{7}{8} = \frac{7}{8}m$$

   Como o valor esperado é $\frac{7}{8}m$, então certamente há uma atribuição que satisfaz pelo menos $\frac{7}{8}m$ cláusulas, como gostaríamos de demonstrar.