Análise Probabilística e Algoritmos Randomizados

- Problema da contratação :
  - → Há uma lista de candidatos $C_1, \dots C_n$
  - → Contratamos C_1 automaticamente
  - → Cada candidato possui uma nota $N_1, \dots, N_n$
  - → Os candidatos chegam em ordem $C_1, \dots, C_n$
  - → Se entrevistamos um candidato com nota maior do que a do que está contratado demitimos o atual e contratamos o entrevistado

Há um custo c_h p/ cada contratação

```
Contratar (N_1, ..., N_n)
    N* ← N_1
    Para i = 2, ..., n
        Se N_i > N*
            N* ← N_i    (Custo c_h)
```

Tempo : $\theta(n)$

Custo : $m \cdot c_h$, $m = \#$contratados

Melhor caso : c_h

Pior caso : $n \cdot c_h$

Quais são as probabilidades?

Análise Probabilística

- Em geral, avaliar o tempo de processamento
- Avaliar outras quantidades
  - Precisamos de mais informações (ou suposições) sobre a distribuição das instâncias
  - Usamos a média.

- Tempo de processamento do caso médio
  Custo do caso médio

- Assumir que os candidatos estão em uma ordem aleatória.
  - As notas são uma ordenação de $1, \dots, n$
  - Cada uma das $n!$ ordenações possui igual probabilidade

- Permutação aleatória uniforme

Variação do Modelo

- A agência envia uma lista de candidatos
- Não conhecemos as notas
- Nós escolhemos a ordem

Contratar (A)
1. Randomiza A
2. $N^* \leftarrow 0$
3. Para $i = 1, \ldots, |A|$
4. Se $N^* < N(A[i])$
5. $N^* = N(A[i])$

- Dizemos que um algoritmo é randomizado se seu comportamento depende da instância e de um gerador de números aleatórios.

- Assumimos que existe uma função $\text{Random}(a,b)$ que devolve um número em $[a,b]$ de forma uniforme
  - cada valor com prob. $1/(b-a+1)$

- Pseudo aleatório

- Dizemos que um algoritmo é randomizado se seu comportamento depende da instância e de um gerador de números aleatórios.
- Assumimos que existe uma função Random(a,b) que devolve um número em [a,b] de forma uniforme
  - Cada valor com prob. $1/(b-a+1)$
  - Pseudo aleatório
- O tempo de processamento esperado é tomado sobre a distribuição do gerador de números aleatórios
  - Diferente de supor que a ordem de entrada é aleatória.
- Algoritmos randomizados "pagam" com incerteza, ganham com simplicidade

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS INDICADORAS

- DADO ESPAÇO S E EVENTO $A \subseteq S$, A VARIÁVEL INDICADORA $I(A)$ É DEFINIDA POR

$$I(A) = \begin{cases} 1 & \text{SE } A \text{ ACONTECE} \\ 0 & \text{SE } A \text{ NÃO ACONTECE} \end{cases}$$

EX: $S = \{\overset{H}{\text{CARA}}, \overset{T}{\text{COROA}}\}$, $Pr(H) = Pr(T) = 1/2$

→ $I(H)$ CONTA O NÚMERO DE CARAS AO JOGAR A MOEDA UMA VEZ

→ O NÚMERO DE CARAS ESPERADO É

$$E(I(H)) = 1 \cdot Pr(H) + 0 \cdot Pr(T) = 1/2$$

LEMA: DADO ESPAÇO S E EVENTO A, TEMOS $E(I(A)) = Pr(A)$

JOGANDO n MOEDAS IGUAIS

→ X_i A VARIÁVEL INDICADORA DE QUE A i-ÉSIMA MOEDA DÁ CARA

→ X É O NÚMERO DE CARAS

$$X = X_1 + \cdots + X_n$$

$$\Rightarrow E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{1/2}_{\text{PROB. CARA}} = n/2$$

$$p = p \cdot n$$

Análise do Problema de Contratação

→ X_i : Var. indicadora de que C_i foi contratado

→ $X = X_1 + \cdots + X_n$ # Candidatos contratados

Pelo lema, $E(X_i) = \sum Pr(C_i \text{ é contratado})$

→ C_i é contratado quando for melhor que os anteriores

Af: $Pr(C_i \text{ é contratado}) = 1/i$

Logo $E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} Pr(C_i \text{ é contratado}) = \sum_{i=1}^{n} 1/i = \log n + O(1)$

lin esp.

Contratamos em média $\log n$ candidatos

⇒ Custo médio $O(C_h \cdot \log n)$

AF: $Pr(C_i$ é contratado$) = 1/i$

Prova: Fixe $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ t.q. $|S| = i$ $\qquad$ S fixado $\rightarrow$

P_S = conj. das permut. em que os primeiros elts são os de S. $\qquad$ OBS: $|P_S| = i!(n-i)!$ $\qquad$ P_S fixado $\rightarrow$

$S = \{a_1, \dots, a_i\}$

Há $(i-1)!(n-i)!$ permut. em P_S em que o i-ésimo é maior

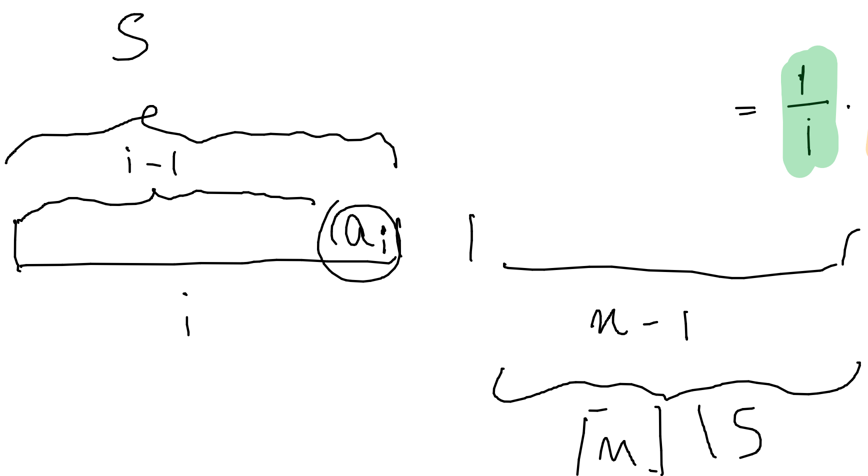
Ou seja $\frac{(i-1)!(n-i)!}{i!(n-i)!} = 1/i$ das permutações em P_S contratam i

---

Logo $\qquad$ ESQUECI P_S

$$Pr(C_i \text{ é contratado}) = \frac{\#\text{Permuts. que } C_i \text{ é contratado}}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{|S|=i} \frac{1}{i} |P_S|$$

$$= \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{n!} \sum_{|S|=i} |P_S| = \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{n!} \cdot n! = \frac{1}{i} \qquad \blacksquare$$



RECAPITULANDO

- O PRIMEIRO ALGORITMO ASSUMIA QUE A ORDEM DOS CANDIDATOS ERA ALEATÓRIA

$$\text{CUSTO MÉDIO} : O(C_h \cdot \log n)$$

→ UM ADVERSÁRIO PODERIA ESCOLHER UMA ORDEM RUIM $(O(n \cdot C_h))$

- O SEGUNDO ALGORITMO REALIZA UM SORTEIO DA ORDEM

$$\text{CUSTO ESPERADO} : O(C_h \cdot \log n)$$

→ NENHUM ADVERSÁRIO PODE ATRAPALHAR.

- DIFERENÇA ENTRE ANÁLISE PROBABILÍSTICA E ALGORITMOS RANDOMIZADOS

PROBABILIDADE

- ESPAÇO AMOSTRAL Ω : CONJUNTO DE TODOS OS POSSÍVEIS RESULTADOS DE UM EXPERIMENTO ALEATÓRIO

  EX: FACES DE UM DADO $\Omega = \{1, \dots, 6\}$

- EVENTO : QUALQUER SUBCONJUNTO DE Ω

  EX: FACES PARES $A = \{2, 4, 6\}$

- EVENTO ELEMENTAR : EVENTO DO TIPO $A = \{r\}$

  EX: $A = \{3\}$

- FUNÇÃO DE PROBABILIDADE : FUNÇÃO $P_R : \Omega \to [0, 1]$ T.Q. $\sum_{\omega \in \Omega} P_R(\omega) = 1$

  → ESTENDEMOS PARA SUBCONJUNTOS DE Ω: SE $A \subseteq \Omega$, ENTÃO $P_R(A) = \sum_{\omega \in A} P_R(\omega)$

  1. PARA TODO $A \subseteq \Omega$, TEMOS $P_R(A) \in [0, 1]$
  2. $P_R(\Omega) = 1$
  3. SE $A_1, \dots, A_K$ SÃO EVENTOS DISJUNTOS, ENTÃO $P_R\left(\bigcup_{i=1}^{K} A_i\right) = \sum_{i=1}^{K} P_R(A_i)$

PRINCÍPIO DA INCLUSÃO E EXCLUSÃO

4. SE $A_1, \ldots, A_k \subseteq \Omega$, ENTÃO

$$Pr\left(\bigcup A_i\right) = \sum Pr(A_i) - \sum_{i<j} Pr(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} Pr(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots$$

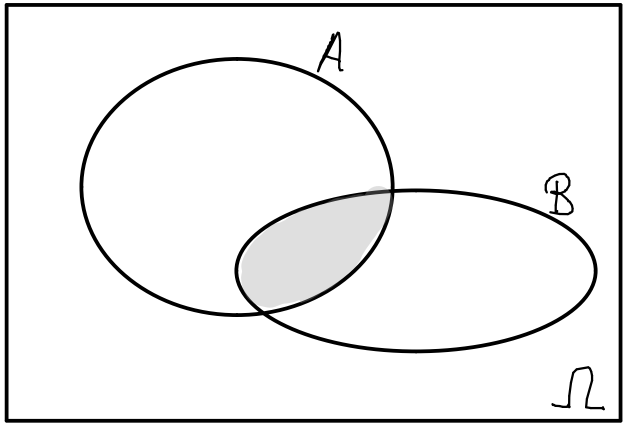
COTA DA UNIÃO

→ VERSÃO FRACA DO P.I.E.

5. SE $A_1, \ldots, A_k \subseteq \Omega$, ENTÃO $Pr\left(\bigcup A_i\right) \leq \sum Pr(A_i)$

PROBABILIDADE CONDICIONAL

- A PROB. DE OCORRER UM EVENTO A, SABENDO QUE OCORRE UM EVENTO B



$$Pr(A \mid B) = \frac{Pr(A \cap B)}{Pr(B)}$$

EX: DADOS HONESTOS. QUAL A PROBABILIDADE DE SAIR 2 SABENDO QUE SAIU PAR?

$$Pr(2 \mid \text{FOI PAR}) = \frac{Pr(\{2\} \cap \{2,4,6\})}{Pr(\{2,4,6\})} = \frac{Pr(\{2\})}{Pr(\{2,4,6\})} = \frac{1/6}{1/2} = 1/3$$

- SE $Pr(A \mid B) = Pr(A)$, OU SEJA, $Pr(A \cap B) = Pr(A) \cdot Pr(B)$,

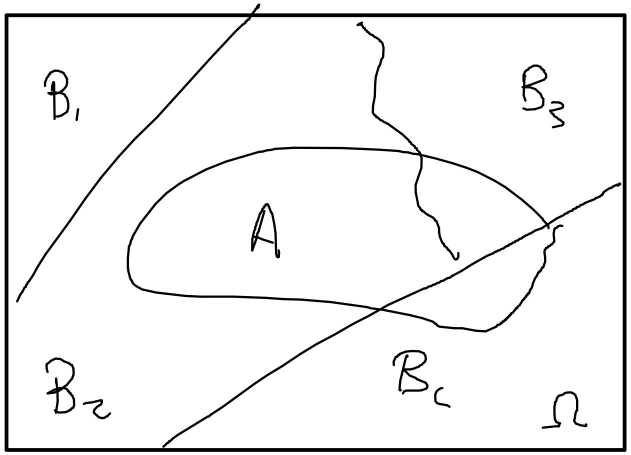
DIZEMOS QUE A E B SÃO EVENTOS INDEPENDENTES

PROBABILIDADE TOTAL

- SEJA $B_1, \dots, B_m$ UMA PARTIÇÃO DE Ω EM EVENTOS DISJUNTOS.

A PROB. DE UM EVENTO $A \subseteq \Omega$

$$P_R(A) = \sum_{i=1}^{m} P_R(A \mid B_i) \cdot P_R(B_i)$$



- REGRA DE BAYES

$$P_R(B_K \mid A) = \frac{P_R(B_K \cap A)}{P_R(A)} = \frac{P_R(A \mid B_K) \cdot P_R(B_K)}{\sum_{i=1}^{m} P_R(A \mid B_i) \cdot P_R(B_i)}$$

Variáveis aleatórias

- Uma variável aleatória é uma função $X : \Omega \to \mathbb{R}$

Ex: Tempo de execução de um alg. randomizado
Custo de um alg. randomizado

- Quando escrevemos $Pr(X = x)$ nos referimos à prob. do evento

$$A_{X=x} = \{ \omega \in \Omega : X(\omega) = x \}$$

Ex: Jogar n moedas. X = número de caras

$$Pr(X = k) = \binom{n}{k} / 2^n$$

- Função densidade de probabilidade de X

$$P_X(x) : \mathbb{R} \to [0,1] \quad \text{t.q.} \quad P_X(x) = Pr(X = x)$$

- ESPERANÇA OU VALOR ESPERADO DE

MÉDIA PONDERADA PELA PROBABILIDADE

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P_R(\omega) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot P_X(x)$$

EX: LANÇAR SEIS MOEDAS

$$E(X) = 1 \cdot P_X(1) + \cdots + 6 \cdot P_X(6) \quad , \quad \text{SABEMOS QUE } P_X(k) = \binom{6}{k} / 2^6$$

$$= (6 + 30 + 60 + 60 + 30 + 6) / 2^6 = 3$$

- A ESPERANÇA É UMA FUNÇÃO LINEAR.

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

, EM QUE X, Y SÃO VAR. ALEAT. E $a, b \in \mathbb{R}$

EX: LANÇAR SEIS MOEDAS : $X = X_1 + \cdots + X_6$, EM QUE X_i É O RESULTADO DO i-ÉSIMO LANÇAMENTO

LIN. ESPERANÇA

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{6} X_i\right) = \sum_{i=1}^{6} E(X_i) = \sum_{i=1}^{6} 1/2 = 3$$

LIMITES DE CAUDA

- ESPERANÇA É A MÉDIA
  - → VALIOSO QUANDO REPETIMOS UM EXPERIMENTO VÁRIAS VEZES
  - → NÃO NOS DÁ MUITA INFORMAÇÃO QUANTO A DENSIDADE DE PROB.

DESIGUALDADE DE MARKOV:

$$Pr(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a} \quad \text{SE} \quad a > 0$$

PROVA:

$$E(X) \overset{\text{DEF.}}{=} \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot Pr(X = x) \geq \sum_{x \geq a} x \cdot Pr(X=x)$$

$$\overset{x \geq a}{\geq} \sum_{x \geq a} a \cdot Pr(X=x)$$

$$\geq a \cdot \sum_{x \geq a} Pr(X=x)$$

$$= a \cdot Pr(X \geq a) \quad \blacksquare$$

$X \geq a$

- Variância de X: valor esperado da distância de X para $E(X)$

$$\mathrm{Var}(X) = E\left((X-E(X))^2\right) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$Y^2 = (X - E(X))^2$$

$$X^2 - 2XE(X) + E(X)^2$$

→ Também usamos $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$

↳ Desvio Padrão

Desigualdade de Chebyshev

$$\Pr(|X-E(X)| \geq a) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}, \text{ se } a > 0$$

Prova: $\Pr(|X-E(X)| \geq a) = \Pr\left(\underbrace{(X-E(X))^2}_{Y} \geq a^2\right)$

Markov

$$\leq \frac{E((X-E(X))^2)}{a^2} \overset{\text{def. var}}{=} \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2} = \frac{\cancel{\sigma^2}}{k^2\cancel{\sigma^2}}$$

Alternativamente, escrevendo $a = k \cdot \sigma$, temos

$$\Pr(|X-E(X)| \geq k\cdot\sigma) \leq 1/k^2$$

Variáveis aleatórias importantes

- **Bernoulli**: dado $p \in [0,1]$, $X = \begin{cases} 1 & \text{com prob } p \\ 0 & \text{com prob } 1-p \end{cases}$

Ex: variáveis indicadoras

→ Densidade de probabilidade $P_X(x) = \begin{cases} p & \text{se } x = 1 \\ 1-p & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

Ex: moeda viciada.

Lema: $E(X) = 1 \cdot P_r(X=1) + 0 \cdot P_r(X=0) = p.$

- **Binomial**

→ Indica o número de sucessos em uma seq. de experimentos aleatórios idênticos e independentes

$$X = X_1 + \dots + X_n \quad \text{com} \quad P_{X_1}(x) = \dots = P_{X_n}(x) \quad \forall x$$

Ex: número de caras

→ Densidade $P_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, & 0 \leq x \leq n \text{ inteiro} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

Variável Aleatória Geométrica

Heads — Tail
Cara — Coroa

$$\Omega = \{ \underset{p}{H},\ \underset{(1-p)\,p}{TH},\ \underset{(1-p)(1-p)\cdot p}{TTH},\ T\cdots TH,\ \ldots \}$$

→ Não estamos interessados no número de sucessos, mas sim no número de experimentos até o primeiro sucesso

Ex: Quantas vezes precisamos jogar a moeda até sair cara?

→ A dens. de uma var. geométrica X com prob. de sucesso p é

$$P_X(x) = \begin{cases} p(1-p)^{x-1} & \text{para } x = 1,2,\ldots \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

→ $E(X) = 1/p$

Prova: $E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot p(1-p)^{x-1} \Rightarrow (1-p)E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x \cdot p(1-p)^{x} = \sum_{i=2}^{\infty} (x-1)\, p(1-p)^{x-1}$

$$pE(X) = E(X) - (1-p)E(X) = p + \sum_{i=2}^{\infty} p(1-p)^{x-1}(x-(x-1))$$

$$= p + p\sum_{i=1}^{\infty}(1-p)^{x} = p - \cancel{p}\,\frac{(1-p)}{\cancel{p}} = 1 \quad \blacksquare$$