Gabarito P2

Q1 (2 pontos)

1) Um circuito ótimo C^* sem uma aresta gera um caminho $C^* \setminus e$.
O caminho $C^* \setminus e$ é uma árvore geradora para G. Como T é mínima para (G,c):
$c(T) \leq c(C^* \setminus e) \leq c(C^*) = opt(G,c)$.

2) T não é solução viável porque não tem ciclo.

Q2 (2 pontos)

Considere a família G_k, onde cada grafo bipartido G_k tem partes A_k e B_k, onde $|B_k| = k$ e $A_k = A'_2 \cup A'_3 \cup \dots \cup A'_k$, onde $|A'_i| = \left|\frac{k}{i}\right|$, cada vértice de A'_i tem grau i e quaisquer dois vértices distintos em A'_i não têm vizinhos em comum.
O vértice de mais grau em B_k tem grau $k-1$.
O vértice de A'_k tem grau k.
B_k é uma cobertura. A heurística retorna A_k.
$|A_k| = \sum_{i=2}^{k} |A'_k| \simeq k \log k$.

Q3 (2 pontos)

Na árvore de busca limitada cada nó testa se o grafo é split em $O(n^5)$, a ramificação é o número de chamadas recursivas, que serão 5 em cada nó da recursão e a altura da árvore é k.
O algoritmo FPT é $O(5^k n^5)$.

QUESTÃO 4. (4 pontos) Um *caminho* é um grafo conexo de grau máximo no máximo 2 e possui dois vértices com grau exatamente 1. Um *ciclo* é um grafo conexo no qual cada vértice possui grau exatamente 2. Um caminho ou ciclo em um grafo G é dito *Hamiltoniano* se contém todos os vértices de G. Considere os seguintes problemas, e resolva os itens $a - g$.

Problema: `Caminho Hamiltoniano`.
Dados: um grafo G
Pergunta: G possui um caminho Hamiltoniano?

Problema: `Ciclo Hamiltoniano`.
Dados: um grafo G
Pergunta: G possui um ciclo Hamiltoniano?

Problema: `Ciclo meio Hamiltoniano`.
Dados: um grafo G
Pergunta: G possui um caminho com pelo menos $|V(G)|/2$ vértices?

a) Apresente uma redução do problema `Caminho Hamiltoniano` para o problema `Ciclo Hamiltoniano`.

   Solução. Devemos apresentar um algoritmo f que leva instâncias do `Caminho Hamiltoniano` em instâncias do `Ciclo Hamiltoniano` com a seguinte propriedade: uma instância G do `Caminho Hamiltoniano` é do tipo SIM se e somente se $f(G)$ é do tipo SIM. Em outras palavras, que G possui um caminho hamiltoniano se e somente se $f(G)$ possui um ciclo hamiltoniano.

   Considere a função f que recebe um grafo $G = (V, E)$ (uma instância do `Caminho Hamiltoniano`), e devolve um grafo $f(G) = G'$ obtido de G pela adição de um vértice novo v juntamente com todas as arestas ligando v a todos os vértices em $V(G)$.

   Afirmamos que G possui um caminho hamiltoniano se e somente se G' possui um ciclo hamiltoniano. De fato, se G possui um caminho hamiltoniano, digamos $u_0 \cdots u_n$, então $vu_0 \cdots u_nv$ é um ciclo hamiltoniano em G'. Por outro lado, suponha que G' contém um ciclo hamiltoniano C. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $C = vw_0 \cdots w_nv$. Nesse caso, $w_0 \cdots w_n$ é um caminho que passa por todos os vértices de G, ou seja, um caminho hamiltoniano, como desejado.

b) Suponha que exista um algoritmo A' que decide `Caminho Hamiltoniano`, e construa um algoritmo A que decide `Ciclo Hamiltoniano` usando apenas um número pequeno de execuções de A';

   Solução. Há duas soluções. A primeira solução é definir, para cada aresta $e = uv \in E(G)$ um grafo G_e obtido de G pela adição de dois novos vértices u', v' e das arestas uu' e vv'. Cada grafo desses pode ser obtido em tempo $O(n^2)$ e, portanto, a coleção de tais grafos pode ser obtida em tempo $O(n^4)$. O algoritmo A consiste então da execução de A' em cada um dos grafos G_e e retorna SIM se pelo menos uma das execuções de A' retornar SIM. No que segue provamos que $A'(G_e) = SIM$ se e somente se G possui um ciclo Hamiltoniano.

De fato, se $A'(G_e) = SIM$ para algum $e \in E(G)$, então todo caminho Hamiltoniano em G_e deve ter u' e v' como vértices finais. Assim, se removermos u' e v' e adicionarmos a aresta uv obtemos um ciclo Hamiltoniano em G. Por outro lado, suponha que G possui um ciclo Hamiltoniano C, e seja $e = uv$ uma aresta qualquer de C e note que $C - uv + uu' + vv'$ é um caminho Hamiltoniano em G_e, e portanto, $A'(G_e) = SIM$. Assim, G possui um ciclo Hamiltoniano se e somente se $A'(G) = SIM$. Note que o número de vezes que executamos o algoritmo A' é no máximo $|E(G)| = O(n^2)$.

Uma outra solução resulta em rodar A' exatamente uma vez. Dado grafo G, seja u um vértice arbitrário de G e seja G' o grafo obtido de G' ao adicionarmos um gêmeo falso v' de v, e mais dois novos vértices x, y como segue. Um *gêmeo falso* é um novo vértice v' adjacente aos mesmos vizinhos de v; e x e y são adicionados juntamente com as arestas xv e yv'. Note que se G possui um ciclo Hamiltoniano, digamos $vu_0 \cdots u_{n-1}v$, então G' possui um caminho $vu_0 \cdots u_{n-1}v'$, que pode ser transformado em um caminho Hamiltoniano pela adição das arestas xv, yv'. Logo, $A'(G') = SIM$. Por outro lado, se $A'(G') = SIM$, então G' possui um caminho Hamiltoniano, que por sua vez é forçado a ter x e y como vértices finais, porque tais vértices possuem grau precisamente 1 (em G'). Então um tal caminho deve ser da forma $xvw_0 \cdots w_{n-1}v'y$, mas então $vw_0 \cdots w_{n-1}v$ é um ciclo Hamiltoniano em G, como desejado.

c) Enuncie as definições de Problemas NP-Completos e NP-Difícil;

Solução. Dizemos que um problema Π é NP-difícil se todo problema Π' em NP pode ser reduzido em tempo polinomial para Π. Dizemos que Π é um problema NP-completo se Π está em NP e se Π é NP-difícil.

d) Mostre que `Ciclo Hamiltoniano` está em NP.

Solução. Para isso precisamos definir um certificado que possa ser verificado em tempo polinomial. Um certificado para este problema é uma sequência (ordenada) de vértices. Dado uma instância G de `Ciclo Hamiltoniano` e um certificado $C = v_0, \ldots v_k$, verificamos C da seguinte forma. Primeiramente C deve conter cada vértice de G precisamente uma vez. Isso pode ser feito em tempo $O(n)$. Depois verificamos se as arestas $v_i v_{i+1}$ estão em G (tomando índices módulo k, i.e., $v_{k+1} = v_0$). Isso pode também ser feito em tempo $O(n)$ ou $O(n^2)$ dependendo da estrutura de dados utilizada. Aceitamos C se C satisfizer as duas condições acima, e rejeitamos caso contrário.

No que segue, assuma que `Caminho Hamiltoniano` é um problema NP-Completo.

e) Mostre que `Ciclo Hamiltoniano` é NP-difícil;

Solução. Assumindo que `Caminho Hamiltoniano` é NP-completo, temos que `Caminho Hamiltoniano` é NP-difícil e, portanto, que todo problema Π' em NP pode ser reduzido a `Caminho Hamiltoniano` em tempo polinomial. No item a) mostramos um algoritmo que reduz `Caminho Hamiltoniano` a `Ciclo Hamiltoniano` em tempo polinomial. Logo, pela transitividade da transformação polinomial, todo problema Π' em NP pode ser reduzido a `Ciclo Hamiltoniano` em tempo polinomial. Logo `Ciclo Hamiltoniano` é NP-difícil

f) `Ciclo Hamiltoniano` é NP-Completo? justifique

Solução. Sim. Como vimos em d), `Ciclo Hamiltoniano` está em NP, e como vimos em e), `Ciclo Hamiltoniano` é NP-difícil. Logo `Ciclo Hamiltoniano` é NP-completo, conforme a definição apresentada em c).

g) `Ciclo meio Hamiltoniano` é NP-Completo? justifique

Solução. Primeiramente mostramos que `Ciclo meio Hamiltoniano`está em NP. Isso é feito de forma análoga ao item d): um certificado para `Ciclo meio Hamiltoniano` é uma sequência de vértices, e sua verificação consiste em checar se tal sequência possui pelo menos metade dos vértices, e se qualquer par de vértices consecutivos é ligado por uma aresta do grafo dado.

Para mostrar que `Ciclo meio Hamiltoniano`é NP-difícil, apresentamos uma redução polinomial g de `Ciclo Hamiltoniano` para `Ciclo meio Hamiltoniano`. Dado grafo G (como instância de `Ciclo Hamiltoniano`), definimos $g(G)$ como o grafo obtido de G pela adição de $|V(G)|$ vértices isolados. Então $g(G)$ possui exatamente $2|V(G)|$ vértices. Note que se G possui um ciclo Hamiltoniano (i.e., se G é uma instância do tipo SIM), então $g(G)$ possui um ciclo contendo exatamente os mesmos vértices, e nenhum dos vértices novos. Logo, tal ciclo possui $|V(G)| = |V(g(G))|/2$ vértices e $g(G)$ é uma instância do tipo SIM. Por outro lado, se $g(G)$ possui um ciclo C com metade de seus vértices, então C não pode conter nehum dos vértices novos, porque tais vértices são isolados. Logo C é um ciclo em G que contém $|V(g(G))|/2 = |V(G)|$ vértices, ou seja, um ciclo Hamiltoniano em G.

Como `Ciclo meio Hamiltoniano` está em NP e é NP-difícil, então `Ciclo meio Hamiltoniano` é NP-completo.

obs. Uma outra redução pode considerar $g(G)$ como o grafo formado por duas cópias disjuntas de G.