

COS841/MAB704 Complexidade de Algoritmos

Prova P1

Professores: F. Marquezino, F. Botler, C. Figueiredo
Universidade Federal do Rio de Janeiro

28 de novembro de 2023

Enviar as soluções por email para Franklin, Fabio, Celina, até 28 de novembro de 2023.

1. [2 pontos] Sejam $f(n), g(n)$ funções positivas. Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique sua resposta com uma prova ou um contraexemplo.

(1.1) ___ $f(n) = O(g(n))$ se e somente se $g(n) = \Omega(f(n))$.

(1.2) ___ Se $f(n) = O(g(n))$ então $2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$.

2. [2 pontos] Suponha que você tenha um tabuleiro de xadrez com $n \times n$ quadrados e uma peça que pode de mover somente de três formas:

- para o quadrado imediatamente acima
- para o quadrado na diagonal acima e à esquerda (exceto, claro, se a peça já estiver na coluna mas à esquerda!)
- para o quadrado na diagonal acima e à direita (exceto, claro, se a peça já estiver na coluna mas à direita!)

Considere ainda que existe um custo associado a cada quadrado do tabuleiro. Finalmente, considere também que a peça deve ser posicionada inicialmente em um quadrado qualquer da primeira fileira do tabuleiro.

Escreva um algoritmo que encontre o caminho de menor custo que pode ser percorrido por uma peça desde a primeira até a última fileira do tabuleiro. Explique o raciocínio utilizado para elaborar o algoritmo e qual técnica você utilizou.

3. [2 pontos](3.1) Prove que são necessárias pelo menos $\lceil 3n/2 \rceil - 2$ comparações no pior caso para determinar simultaneamente o máximo e o mínimo em uma lista com n números.

(3.2) Descreva um algoritmo que encontre o máximo e o mínimo em uma lista com n números realizando $\lceil 3n/2 \rceil - 2$ comparações no pior caso. Explique o raciocínio utilizado para elaborar o algoritmo e qual técnica você utilizou.

4. [2 pontos] Um *caminho* é um grafo conexo de grau máximo 2 e possui dois vértices com grau exatamente 1. Um *ciclo* é um grafo conexo no qual cada vértice possui grau exatamente 2. Um caminho ou ciclo em um grafo G é dito *Hamiltoniano* se contém todos os vértices de G . Considere os seguintes problemas, e resolva os itens $a - g$.

Problema: **Caminho Hamiltoniano**.

Dados: um grafo G

Pergunta: G possui um caminho Hamiltoniano?

Problema: **Ciclo Hamiltoniano**.

Dados: um grafo G

Pergunta: G possui um ciclo Hamiltoniano?

Problema: **Ciclo meio Hamiltoniano**.

Dados: um grafo G

Pergunta: G possui um caminho com pelo menos $|V(G)|/2$ vértices?

- a) Apresente uma redução polinomial do problema **Caminho Hamiltoniano** para o problema **Ciclo Hamiltoniano**.
- b) Suponha que exista um algoritmo A' que decide **Ciclo Hamiltoniano**, e construa um algoritmo A que decide **Caminho Hamiltoniano** usando apenas um número constante de execuções de A' ;
- c) Enuncie as definições de Problemas NP-Completo e NP-Difícil;
- d) Mostre que **Ciclo Hamiltoniano** está em NP.
No que segue, assuma que **Caminho Hamiltoniano** é um problema NP-Completo.
- e) Mostre que **Ciclo Hamiltoniano** é NP-difícil;
- f) **Ciclo Hamiltoniano** é NP-Completo?
- g) **Ciclo meio Hamiltoniano** é NP-Completo?

5. [2 pontos] Explique com suas palavras quais seriam as implicações se fosse encontrado um algoritmo polinomial para o problema **Ciclo Hamiltoniano**.