Regras de Dedução Natural

$\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \rightarrow$

$\wedge i \quad \wedge E \quad \vee i \quad \vee E \quad \rightarrow i \quad \rightarrow E$

• **Conjunção ($\wedge$)**

$\wedge$-Introdução ($\wedge i$): nos permite concluir $\phi \wedge \psi$, se já concluímos ϕ e ψ separadamente

Escrevemos

$$\frac{\phi \qquad \psi}{\phi \wedge \psi}\ \wedge i$$

Premissas

Nome da regra

Conclusão

$\wedge$-Eliminação ($\wedge E$): nos permite concluir ϕ e ψ se já concluímos $\phi \wedge \psi$ anteriormente

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi}\ \wedge E_1 \qquad\qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi}\ \wedge E_2$$

Ex: Prove que $p \wedge q, r \vdash q \wedge r$

Premissas $p \wedge q$

r

← Preencher

Conclusão $q \wedge r$

1	$p \wedge q$	Premissa	
2	r	Premissa	
3	q	$\wedge E_2$	1
4	$q \wedge r$	$\wedge i$	3, 2

Barra

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{p \wedge q}^{1}}{3\ q}\,\wedge E_2 \qquad \overset{2}{r}}{q \wedge r}\,\wedge i$$

$$\dfrac{3 \qquad\qquad 2}{q \wedge r}$$

EX: $p \wedge q \vdash q \wedge p$ COMUTATIVIDADE

$$\vdash ((p \wedge q) \rightarrow (q \wedge p))$$

1	$p \wedge q$	PREMISSA
2	p	$\wedge E_1$ 1
3	q	$\wedge E_2$ 1
4	$q \wedge p$	$\wedge i$ 3, 2

EX: PROVE QUE $(p \wedge q) \wedge r,\ s \wedge t \vdash q \wedge s$

1	$(p \wedge q) \wedge r$	PREMISSA
2	$s \wedge t$	PREMISSA
3	$(p \wedge q)$	$\wedge E_1$ 1
4	q	$\wedge E_2$ 3
5	s	$\wedge E_1$ 2
6	$q \wedge s$	$\wedge i$ 4,5

NEGAÇÃO DUPLA

$p, \neg(q \wedge \neg r) \vdash$

EX: NÃO É VERDADE QUE NÃO ESTÁ CHOVENDO

$\Rightarrow$ ESTÁ CHOVENDO

$$\neg\neg\phi = \phi$$

REGRAS: $\dfrac{\neg\neg\phi}{\phi}\,\neg\neg E$ $\qquad$ $\dfrac{\phi}{\neg\neg\phi}\,\neg\neg i$

EX: $p, \neg\neg(q \wedge r) \vdash (\neg\neg p) \wedge r$

1	p	PREMISSA
2	$\neg\neg(q \wedge r)$	PREMISSA
3	$\neg\neg p$	$\neg\neg i$ 1
4	$q \wedge r$	$\neg\neg E$ 2
5	r	$\wedge E_2$ 4
6	$(\neg\neg p) \wedge r$	$\wedge i$ 3,5

IMPLICAÇÃO

⇝ REMOÇÃO DA IMPLICAÇÃO

EX: p = CHOVE

$p \to q$ = SE CHOVE, A RUA FICA MOLHADA

GOSTARIA DE CONCLUIR QUE A RUA ESTÁ MOLHADA

⇝ UMA DAS REGRAS MAIS CONHECIDAS

⇝ DADO ϕ E SABENDO QUE ϕ IMPLICA EM ψ, TEMOS ψ

$$\frac{\phi \qquad \phi \to \psi}{\psi} \to E \qquad \text{(MODUS PONENS)}$$

EX: PROVE QUE $p,\ p \to q,\ p \to (q \to r) \vdash r$

$$\frac{\phi \qquad \phi \to \psi}{\psi} \to E$$

1	p	PREMISSA
2	$p \to q$	PREMISSA
3	$p \to (q \to r)$	PREMISSA
4	q	$\to E$ 1, 2
5	$q \to r$	$\to E$ 1, 3
6	r	$\to E$ 4, 5

⇝ VARIAÇÃO : MODUS TOLLENS

EX: $p \to q$ = SE CHOVER, A RUA FICA MOLHADA
$\neg q$ = A RUA NÃO ESTÁ MOLHADA

} GOSTARÍAMOS DE CONCLUIR QUE NÃO CHOVE

⇝ SE $p \to q$ E p, ENTÃO q (MODUS PONENS)

MAS SE $p \to q$ E $\neg q$, SUPONHA p, ENTÃO q E $\neg q$

PREMISSA

M.P.

ABSURDO

⇝ SE $p \to q$ E $\neg q$, ENTÃO $\neg p$

$$\frac{\overset{7}{p \to q} \qquad \overset{3}{\neg q}}{\neg p}\ \text{M.T.}$$

M.T. 7, 3

Ex: $p \to (q \to r),\ p,\ \neg r \vdash \neg q$

1	$p \to (q \to r)$	PREMISSAS
2	p	
3	$\neg r$	
4.	$q \to r$	$\to E$ 2, 1
5	$\neg q$	M.T 4, 3

$q \to r \qquad \neg r$

4 $\qquad$ 3

$$\frac{\phi \qquad \phi \to \psi}{\psi} \to E \qquad\qquad \frac{\phi \to \psi \qquad \neg\psi}{\neg\phi} \text{ M.T.}$$

5 $\quad \neg q$