$$\frac{\phi \qquad \phi \to \psi}{\psi}\ \text{M.P.}\ {\to}E$$

$\cancel{\to E}$

$$\frac{\phi \to \psi \qquad \neg \psi}{\neg \phi}\ \text{M.T}$$

- O Modus Tollens nos diz que

$$p \to q, \neg q \vdash \neg p$$

- Uma outra forma de ver isso é

$$(p \to q) \vdash (\neg q \to \neg p)$$

- Suposição

1	$p \to q$	Premissa
2	$\neg q$	Suposição
3	$\neg p$	M.T 1,2
4	$\neg q \to \neg p$	$\to$i 2–3

Escopo da suposição

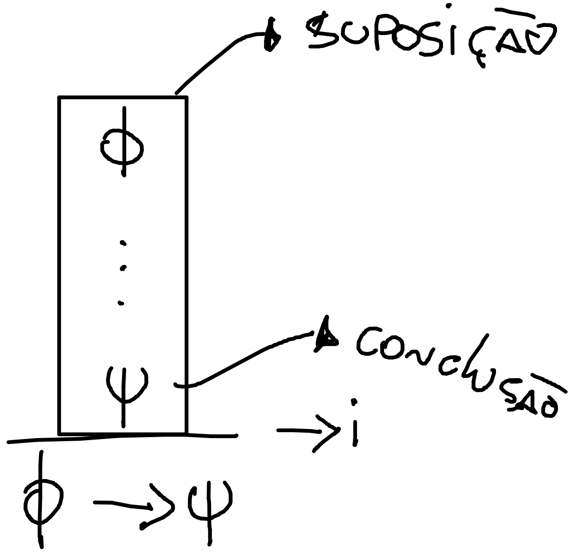
→ Abrimos uma caixa com premissas temporárias

→ A conclusão $\neg q \to \neg p$ não depende de $\neg q$

Ex: Se você é francês, então você é europeu

→ Não depende de você ser francês

INTRODUÇÃO DA IMPLICAÇÃO



- PARA PROVAR $\phi \to \psi$, ASSUMA TEMPORARIAMEN ϕ
- DENTRO DA CAIXA/ESCOPO PODEMOS USAR ϕ, E OUTRAS FORMULAS, COMO PREMISSAS OU CONCLUSÕES JÁ ENCONTRADAS
- PODEMOS ABRIR VÁRIAS CAIXAS SEPARADAS OU "ANINHADAS" UMA DENTRO DA OUTRA
- SÓ PODEMOS USAR ϕ SE ϕ APARECER ANTES E SE NENHUMA CAIXA QUE TENHA ϕ COMO SUPOSIÇÃO TENHA FECHADO.

EX: $\underline{(\neg q \to \neg p)} \vdash (p \to \neg\neg q)$

$\underline{(p \to q)}$

1		$\neg q \to \neg p$	PREMISSA
2	ϕ	p	SUPOSIÇÃO
3		$\neg\neg p$	$\neg\neg i$ 2
4	ψ	$\neg\neg q$	M.T. 1,3
5		$p \to \neg\neg q$	$\to i$ 2-4
5'		q	$\neg\neg E$ 4
6'		$p \to q$	$\to i$ 2-5'

ALTERNATIVA

$$\boxed{\begin{array}{c}\phi \\ \vdots \\ \psi\end{array}}$$

$$\frac{\overbrace{\neg q}^{\phi} \to \overbrace{\neg p}^{\psi} \qquad \overbrace{\neg\neg p}^{\neg\psi}}{\underbrace{\neg(\neg q)}_{\neg\phi}}$$

$$\frac{\phi \to \psi \qquad \neg\psi}{\neg\phi}$$

EX: $\vdash p \to p$

1.	p	SUPOSIÇÃO
2	p	CÓPIA 1
3	$p \to p$	$\to i$ 1-2

DEF: FÓRMULAS LÓGICAS ϕ COM SEQUENTE VÁLIDO $\vdash \phi$ SÃO TEOREMAS

DEF: Fórmulas lógicas ϕ com sequente válido $\vdash \phi$ são **TEOREMAS**

EX: $\vdash (q \to r) \to ((\neg q \to \neg p) \to (p \to r))$

1	$q \to r$	SUPOSIÇÃO
2	$\neg q \to \neg p$	SUPOSIÇÃO
3	p	SUPOSIÇÃO
4	$\neg\neg p$	$\neg\neg$i 3
5	$\neg\neg q$	M.T. 2, 4
6	q	$\neg\neg$E 5
7	r	$\to$E 6, 1
8	$p \to r$	$\to$i 3-7
9	$(\neg q \to \neg p) \to (p \to r)$	$\to$i 2-8
10	$(q \to r) \to ((\neg q \to \neg p) \to (p \to r))$	$\to$i 1-9

$$\frac{\underbrace{\overset{\phi}{\neg q}}\to\underbrace{\overset{\psi}{\neg p}} \qquad \underbrace{\neg\neg p}_{\neg\psi \,=\, \neg\neg\psi\text{? } }}{\underbrace{\neg\neg q}_{\neg \phi}}$$

$$\frac{\begin{matrix}\phi & \phi \to \psi \\ q & q \to r\end{matrix}}{\psi}$$

M.P.

$(q \to r) \vdash (\neg q \to \neg p) \to (p \to r)$

1	$q \to r$	PREMISSA	ϕ
2	$\neg q \to \neg p$	SUPOSIÇÃO	
3	p	SUPOSIÇÃO	
4	$\neg\neg p$	$\neg\neg i$ 3	
5	$\neg\neg q$	M.T. 2, 4	
6	q	$\neg\neg E$ 5	
7	r	$\to E$ 6, 1	
8	$p \to r$	$\to i$ 3-7	
9	$(\neg q \to \neg p) \to (p \to r)$	$\to i$ 2-8	$\psi \to \chi$

$\vdash \phi \to (\psi \to \chi)$

$\phi \vdash (\psi \to \chi)$

$\phi, \psi \vdash \chi$

→ EM PARTICULAR, PODEMOS TRASFORMAR QUALQUER PROVA DE

$$\underline{\phi_1, \ldots, \phi_n} \vdash \psi \qquad\qquad \frac{\phi \quad \phi \to \psi}{\psi}$$

EM UMA PROVA DE

$$\underline{\vdash \phi_1 \to (\phi_2 \to (\phi_3 \to \cdots (\phi_n \to \psi)))}$$

EX: $p \to q,\ p \wedge r \vdash q \wedge r$

1	$p \to q$	PREMISSA
2	$p \wedge r$	PREMISSA
3	p	$\wedge E_1$ 2
4	q	$\to E$ 3, 1
5	r	$\wedge E_2$ 2
6	$q \wedge r$	$\wedge i$ 4, 5

EX: $p \to q \vdash (p \wedge r) \to (q \wedge r)$

1	$p \to q$	PREMISSA
2	$p \wedge r$	SUPOSIÇÃO
3	p	$\wedge E_1$ 2
4	q	$\to E$ 3, 1
5	r	$\wedge E_2$ 2
6	$q \wedge r$	$\wedge i$ 4, 5
7	$(p \wedge r) \to (q \wedge r)$	$\to i$ 2-6

- DISJUNÇÃO ($\vee$)

$\phi, \neg\psi \vdash \phi \vee \psi$

$\phi \vdash \phi \vee \psi$

$p \quad q \vdash p \wedge q$

$p \wedge q \vdash p, q$

$p \vee q$

$\vee$-INTRODUÇÃO

→ SE TEMOS ϕ, ENTÃO $\phi \vee \psi$ É VÁLIDA MESMO QUE ψ SEJA FALSO

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi}\ \vee i_1 \qquad\qquad \frac{\phi}{\psi \vee \phi}\ \vee i_2$$

$\vee$-REMOÇÃO

→ PRECISAMOS ENCONTRAR UMA CONSEQUÊNCIA COMUM DE ϕ E ψ

$$\dfrac{\overset{1}{\phi \vee \psi} \qquad \overset{2-3}{\boxed{\begin{matrix}\phi\\ \vdots\\ \chi\end{matrix}}} \qquad \overset{4-5}{\boxed{\begin{matrix}\psi\\ \vdots\\ \chi\end{matrix}}}}{\chi}\ \vee E$$

EX: $p \vee q \vdash q \vee p$

1	$p \vee q$	PREMISSA
2	p	SUPOSIÇÃO
3	$q \vee p = \chi$	$\vee i_2$ 2
4	q	SUPOSIÇÃO
5	$q \vee p = \chi$	$\vee i_1$ 4
6	$q \vee p$ χ	$\vee E$ 1, 2-3, 4-5

$$\dfrac{\phi}{\phi \vee \psi}\ \vee i_1 \qquad\qquad \dfrac{\phi}{\psi \vee \phi}\ \vee i_2$$

$$((\neg s) \wedge t) \rightarrow q$$