EX: $p \to q \vdash \neg p \vee q$

JÁ VIMOS $\neg p \vee q \vdash p \to q$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $p \to q$ | PREMISSA |
| 2 | $p \vee \neg p$ | LTE |
| 3 | $p$ | SUPOSIÇÃO |
| 4 | $q$ | $\to E$ 3, 1 |
| 5 | $\neg p \vee q$ | $\vee I_2$ 4 |
| 6 | $\neg p$ | SUPOSIÇÃO |
| 7 | $\neg p \vee q$ | $\vee I_1$ 6 |
| 8 | $\neg p \vee q$ | $\vee E$ 2, 3–5, 6–7 |

# RESUMO

- $\wedge i$: PARA PROVAR $\phi \wedge \psi$, DEVEMOS PRIMEIRO PROVAR $\phi$ E $\psi$ SEPARADAMENTE
- $\wedge E_1$: SE TIVERMOS $\phi \wedge \psi$, PODEMOS EXTRAIR $\phi$
- $\vee i_1$: PARA PROVAR $\phi \vee \psi$, TENTE PROVAR $\phi$
- $\vee E$: SE TEMOS $\phi \vee \psi$, E QUEREMOS PROVAR $\chi$,
  DEVEMOS PROVAR $\chi$ A PARTIR DE $\phi$, E A PARTIR DE $\psi$
- $\rightarrow i$: PARA PROVAR $\phi \rightarrow \psi$, TENTE PROVAR $\psi$ A PARTIR DE $\phi$
  SUPONDO
- $\neg i$: PARA PROVAR $\neg \phi$, TENTE PROVAR $\perp$ A PARTIR DE $\phi$

$$A = \{ x \in \mathbb{N} : x \text{ TEM A PROP. } \phi \}$$

$$B = \{ x \in \mathbb{N} : x \text{ TEM A PROP. } \psi \} \qquad \phi(x) \wedge \psi(x)$$

$$A \cap B = \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{N} : x \text{ TEM A PROP } \phi \quad \overset{\wedge}{\text{E}} \\ \qquad\qquad\quad x \text{ TEM A PROP } \psi \end{array} \right\}$$

$$A \cup B = \begin{array}{l} x \in \mathbb{N} : x \text{ TEM A PROP } \phi \quad \text{OU} \\ \qquad\qquad\quad x \text{ TEM A PROP } \psi \end{array} \}$$

# Regras Básicas

## Inclusão

$\wedge$ : $$\frac{\phi \qquad \psi}{\phi \wedge \psi}\ \wedge i$$

$\vee$ : $$\frac{\phi}{\phi \vee \psi}\ \vee i_1 \qquad \frac{\phi}{\psi \vee \phi}\ \vee i_2$$

$\rightarrow$ : $$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots\\ \psi\end{array}}}{\phi \rightarrow \psi}\ \rightarrow i$$

$\neg$ : $$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots\\ \bot\end{array}}}{\neg\phi}\ \neg i$$

$\bot$ : Não há regra

## Exclusão

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi}\ \wedge E_1 \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi}\ \wedge E_2$$

$$\frac{\phi \vee \psi \qquad \boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots\\ \chi\end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c}\psi\\ \vdots\\ \chi\end{array}}}{\chi}\ \vee E$$

$$\frac{\phi \qquad \phi \rightarrow \psi}{\psi}\ \rightarrow E$$

$$\frac{\phi \qquad \neg\phi}{\bot}\ \neg E$$

$\neg\neg$ : $$\frac{\neg\neg\phi}{\phi}\ \neg\neg E$$

$$\frac{\bot}{\phi}\ \bot E$$

# REGRAS DERIVADAS ÚTEIS

$$\frac{\phi \to \psi \qquad \neg\psi}{\neg\phi}\ \text{M.T.}$$

$$\frac{\phi}{\neg\neg\phi}\ \neg\neg\text{i}$$

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\neg\phi\\ \vdots\\ \bot\end{array}}}{\phi}\ \text{PPC}$$

$$\frac{}{\phi \vee \neg\phi}\ \text{LTE}$$

# COMO CONSTRUÍMOS UMA PROVA?

- → DEPENDE DO CASO
- → DADO UM SEQUENTE, ESCREVA AS PREMISSAS NO TOPO, E A CONCLUSÃO NO FINAL
- → PREENCHA O ESPAÇO

EX: SE A CONCLUSÃO É DO TIPO $\phi \to \psi$

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \text{PREMISSAS} \\ \vdots \\ ? \\ \vdots \\ \phi \to \psi \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \text{PREMISSAS} \\ \vdots \\ \boxed{\begin{array}{c} \phi \\ \vdots \\ \psi \end{array}} \\ \phi \to \psi \end{array} \quad \text{SUPOSIÇÃO}$$

DICA: SE EM UM DETERMINADO PONTO VÁRIAS REGRAS PODEM SER APLICADAS, LISTE TODAS AS REGRAS E DECIDA QUAL MELHORA MAIS A SITUAÇÃO DA PROVA.

# Fórmulas equivalentes (Provably equivalent)

**Def:** Sejam $\phi$ e $\psi$ fórmulas da lógica proposicional.

Dizemos que $\phi$ e $\psi$ são equivalentes se

$$\phi \vdash \psi \quad \text{e} \quad \psi \to \phi \quad \text{são válidos}$$

Notação: $\phi \dashv\vdash \psi$

→ Alternativamente $\phi$ e $\psi$ são equivalentes se

$$\vdash (\phi \to \psi) \land (\psi \to \phi) \quad \text{é válido}$$

$\top = \neg \bot$

Ex: $\neg(p \land q) \dashv\vdash (\neg p) \lor (\neg q)$

$\neg(p \lor q) \dashv\vdash (\neg p) \land (\neg q)$

$p \to q \dashv\vdash (\neg p) \lor q \dashv\vdash (\neg q) \to (\neg p)$

$(p \land q) \to p \dashv\vdash r \lor \neg r$

$\dashv\vdash \top$

$(p \land q) \to r \dashv\vdash p \to (q \to r)$

# Prova por contradição

→ Às vezes é difícil provar algo diretamente

→ A regra

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\neg\phi\\ \vdots\\ \bot\end{array}}}{\phi}$$

$a \to b$

$\neg b \to \neg a$

Nos permite provar $\phi$, mostrando que $\neg\phi$ leva a uma contr.

OBS: Há uma linha na lógica chamada de "lógicos intuicionistas" que argumenta que não podemos usar contradição.
Eles também não concordam com as regras

$$\frac{}{\phi \vee \neg\phi}\,\text{LTE} \qquad\qquad \frac{\neg\neg\phi}{\phi}\,\neg\neg E$$

**DEF:** UM NÚMERO REAL POSITIVO É DITO RACIONAL SE PODE SER ESCRITO COMO $m/k$ EM QUE $m, k \in \mathbb{N}$, E DITO IRRACIONAL CASO CONTRÁRIO.

**OBS:** SE $p$ É UM NÚMERO PRIMO, ENTÃO $\sqrt{p}$ É IRRACIONAL.

**TEOREMA:** EXISTEM NÚMEROS IRRACIONAIS $a$ E $b$ T.Q. $a^b$ É RACIONAL.

**PROVA:** TOME $b = \sqrt{2}$ (QUE É IRRACIONAL). (Pela OBS)

TEMOS QUE $b^b$ É RACIONAL $\vee$ OU IRRACIONAL. (LTE)

$\phi$ $\vee$ $\neg\phi$

(i) $b^b$ É RACIONAL. ENTÃO TOMAMOS $a = b = \sqrt{2}$, E $a^b = b^b$ É RACIONAL

$\phi$

SUPOSIÇÃO

(ii) $b^b$ É IRRACIONAL.

$\neg\phi$

SUPOSIÇÃO

TOME $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ (QUE É IRRACIONAL).

TEMOS

$$a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2 \text{ É RACIONAL}$$

$\Rightarrow$ EXISTEM $x = a, b$ irr t.q. $a^b$ é racional

∎