LÓGICA PROPOSICIONAL COMO UMA LINGUAGEM FORMAL

- FÓRMULAS EM LÓGICA PROPOSICIONAL DEVEM SER EXPRESSÕES ESCRITAS COM O ALFABETO

$$\{p, q, r, \ldots\} \cup \{p_1, p_2, \ldots\} \cup \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, (,)\}$$

- MAS NÃO É SÓ ISSO:

EX: $(\neg)()\vee pq\rightarrow$ É UMA EXPRESSÃO NO ALFABETO, MAS NÃO FAZ SENTIDO.

- PRECISAMOS DEFINIR FÓRMULAS BEM FORMADAS

$$\Sigma = \underbrace{\{p, q, r, \dots\} \cup \{p_1, p_2, \dots\}}_{\text{ÁTOMOS PROPOSICIONAIS}} \cup \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, (,)\}$$

DEF: AS FÓRMULAS BEM FORMADAS DA LÓGICA PROPOSICIONAL SÃO AS FÓRMULAS QUE OBTEMOS USANDO AS REGRAS ABAIXO UM NÚMERO FINITO DE VEZES.

ÁTOMO: TODO ÁTOMO PROPOSICIONAL $p, q, r, \dots, p_1, p_2, \dots$ É UMA FÓRMULA BEM FORMADA.

SE ϕ E ψ SÃO FÓRMULAS BEM FORMADAS, ENTÃO

$\neg$: $(\neg\phi)$ TAMBÉM É

$\wedge$: $(\phi \wedge \psi)$ TAMBÉM É

$\vee$: $(\phi \vee \psi)$ TAMBÉM É

$\rightarrow$: $(\phi \rightarrow \psi)$ TAMBÉM É

OBS: SE UMA FÓRMULA NÃO PODE SER CONSTRUÍDA ASSIM, ENTÃO ELA NÃO É BEM FORMADA.

→ ESSE MODELO INDUTIVO É MUITO FREQUENTE.

→ FORMALISMO DE BACKUS NAUR (BNF)

$$\phi ::= p \mid (\neg \phi) \mid (\phi \wedge \phi) \mid (\phi \vee \phi) \mid (\phi \rightarrow \phi)$$

EM QUE p SIGNIFICA QUALQUER ÁTOMO PROPOSICIONAL E CADA OCORRÊNCIA DE ϕ À DIREITA DE $::=$ SIGNIFICA UMA FÓRMULA BEM FORMADA.

→ COMO DECIDIR SE UMA FÓRMULA É BEM FORMADA?

PRINCÍPIO DA INVERSÃO

→ PODEMOS INVERTER O PROCESSO DE CONSTRUÇÃO: POR MAIS QUE TENHAMOS CINCO REGRAS DE CONSTRUÇÃO, HÁ UMA ÚNICA REGRA QUE FOI A ÚLTIMA A SER USADA

PRINCÍPIO DA INVERSÃO

→ PODEMOS INVERTER O PROCESSO DE CONSTRUÇÃO: POR MAIS QUE TENHAMOS CINCO REGRAS DE CONSTRUÇÃO, HÁ UMA ÚNICA REGRA QUE FOI A ÚLTIMA A SER USADA

EX: $\underbrace{(((\neg p) \wedge q)}_{\text{É BEM FORMADO?}} \rightarrow \underbrace{(p \wedge (q \vee (\neg r))))}_{\text{É BEM FORMADO?}}$

É BEM FORMADA SE

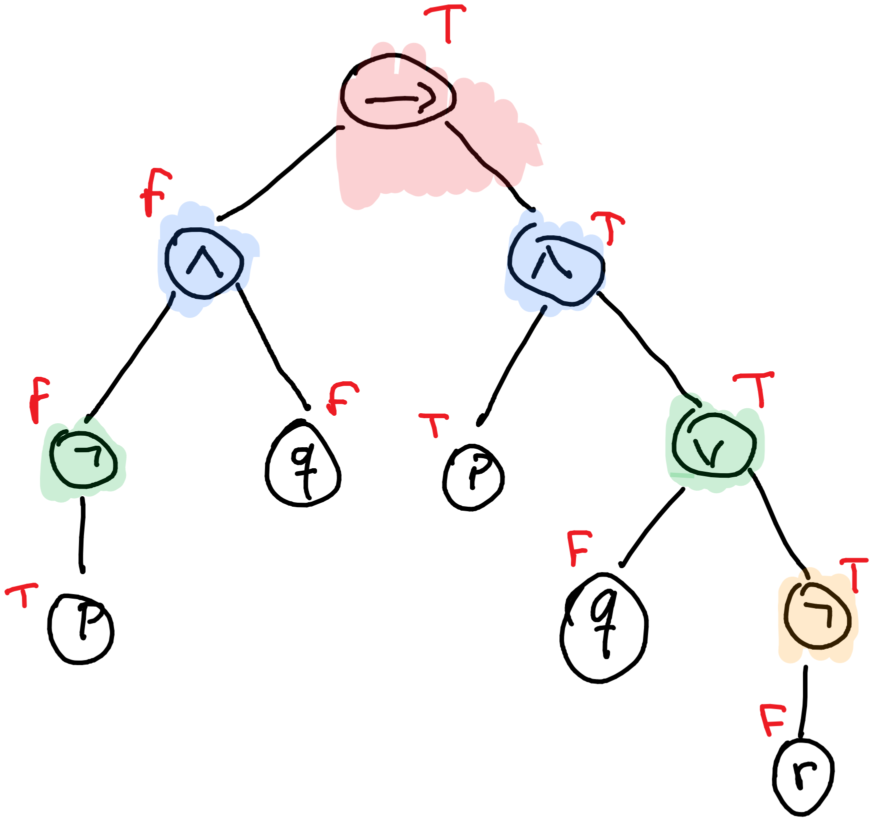
$((\neg p) \wedge q)$ E

$(p \wedge (q \vee (\neg r)))$

SÃO BEM FORMADAS

Ex: $(((\neg p) \wedge q) \to (p \wedge (q \vee (\neg r))))$

É bem formada se $((\neg p) \wedge q)$ e $(p \wedge (q \vee (\neg r)))$ são bem formadas



$p = T$

$q = F$

$r = F$

Árvore de Parse.

↳ análise

→ Precisamos dos parênteses para remover ambiguidades

→ Os parênteses codificam a árvore

→ Para mostrar que uma fórmula não é bem formada, precisamos tentar desenhar sua árvore de parse

OBS:

1) AS FOLHAS SÃO ÁTOMOS

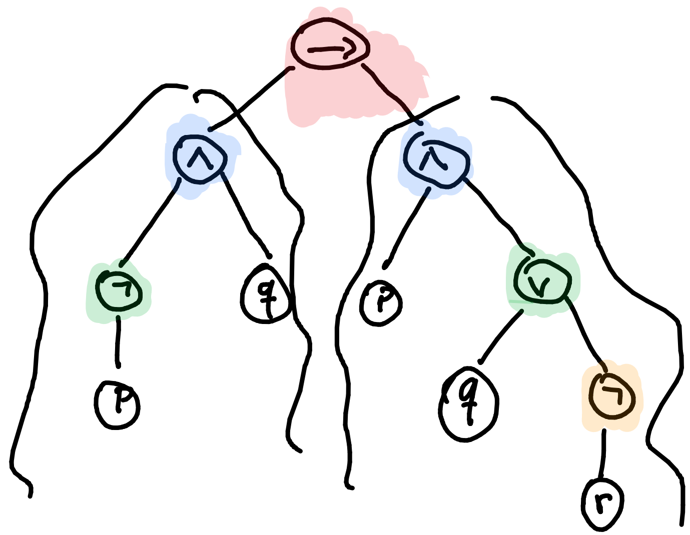
2) OS NÓS INTERNOS SÃO CONECTIVOS LÓGICOS: $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$

3) OS NÓS DO TIPO $\neg$ POSSUEM EXATAMENTE UM FILHO

4) OS NÓS DO TIPO $\vee, \wedge, \rightarrow$ POSSUEM EXATAMENTE DOIS FILHOS.

→ DADO UMA FÓRMULA, UMA SUBFÓRMULA SÃO AS FÓRMULAS CORRESPONDENTES ÀS SUBÁRVORES DA ÁRVORE DE PARSE

EX: $(((\neg p) \wedge q) \to (p \wedge (q \vee (\neg r))))$



SUBFÓRMULAS:

p

q

r

$(\neg p)$

$((\neg p) \wedge q)$

$(\neg r)$

$(q \vee (\neg r))$

$(p \wedge (q \vee (\neg r)))$

$(((\neg p) \wedge q) \to (p \wedge (q \vee (\neg r))))$

Semântica da lógica proposicional

→ Já desenvolvemos um "cálculo" para verificar se das premissas $\phi_1, \dots, \phi_n$ podemos concluir ψ, i.e., se

$$\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \psi$$

→ Vamos desenvolver outra relação entre as premissas e a conclusão que representamos por

$$\phi_1, \dots, \phi_n \vDash \psi$$

→ Vamos estudar os valores verdade das fórmulas atômicas nas premissas e na conclusão, e como os conectivos lógicos manipulam eles.

→ VAMOS ESTUDAR OS VALORES VERDADE DAS FÓRMULAS ATÔMICAS NAS PREMISSAS E NA CONCLUSÃO, E COMO OS CONECTIVOS LÓGICOS MANIPULAM ELES.

EX: O VALOR VERDADE DE $p \wedge q$ É DETERMINADO PELOS VALORES VERDADE DE p E q, E PELO SENTIDO DE $\wedge$

O SENTIDO DE $\wedge$ É CAPTURADO PELA OBSERVAÇÃO DE QUE $p \wedge q$ É VERDADE SE E SOMENTE SE p E q SÃO VERDADE. DO CONTRÁRIO $p \wedge q$ É FALSO

$\wedge$ PRECISA SABER SE p E q SÃO VERDADES E NÃO PRECISA SABER O QUE p E q DIZEM SOBRE A REALIDADE

DEF:

1. O CONJUNTO DE VALORES VERDADE CONTÉM DOIS ELEMENTOS T E F, QUE REPRESENTAM "VERDADE" OU "FALSO"

2. UMA AVALIAÇÃO OU MODELO DE UMA FÓRMULA ϕ É UMA ATRIBUIÇÃO DE CADA ÁTOMO PROPOSICIONAL EM ϕ A UM VALOR VERDADE

EX: $q \leftarrow T$ E $p \leftarrow F$ É UMA AVALIAÇÃO DE $p \vee \neg q$

→ O SIGNIFICADO DE $\wedge$ É UMA FUNÇÃO DE DOIS ARGUMENTOS CADA ARGUMENTO RECEBE UM VALOR VERDADE E O RESULTADO É UM OUTRO VALOR VERDADE.

→ PODEMOS USAR A TABELA VERDADE DE $\wedge$

ϕ	ψ	$\phi \wedge \psi$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

$\phi \wedge \psi$

TABELA VERDADE DOS CONECTIVOS

ϕ	ψ	$\phi \wedge \psi$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

ϕ	ψ	$\phi \vee \psi$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

ϕ	ψ	$\phi \rightarrow \psi$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

$$\frac{\phi \quad \phi \rightarrow \psi}{\psi}\ \text{M.P.}$$

$$\frac{\phi \rightarrow \psi \quad \neg\psi}{\neg\phi}\ \text{M.T}$$

ϕ	$\neg\phi$
T	F
F	T

$$\frac{T}{T}$$

$$\frac{\bot}{F}$$