DESENHAR AS ÁRVORES DE PARSE DE

$$((p \wedge q) \wedge r) \quad \text{e} \quad (p \wedge (q \wedge r))$$

$$(p \wedge (q \wedge r))$$

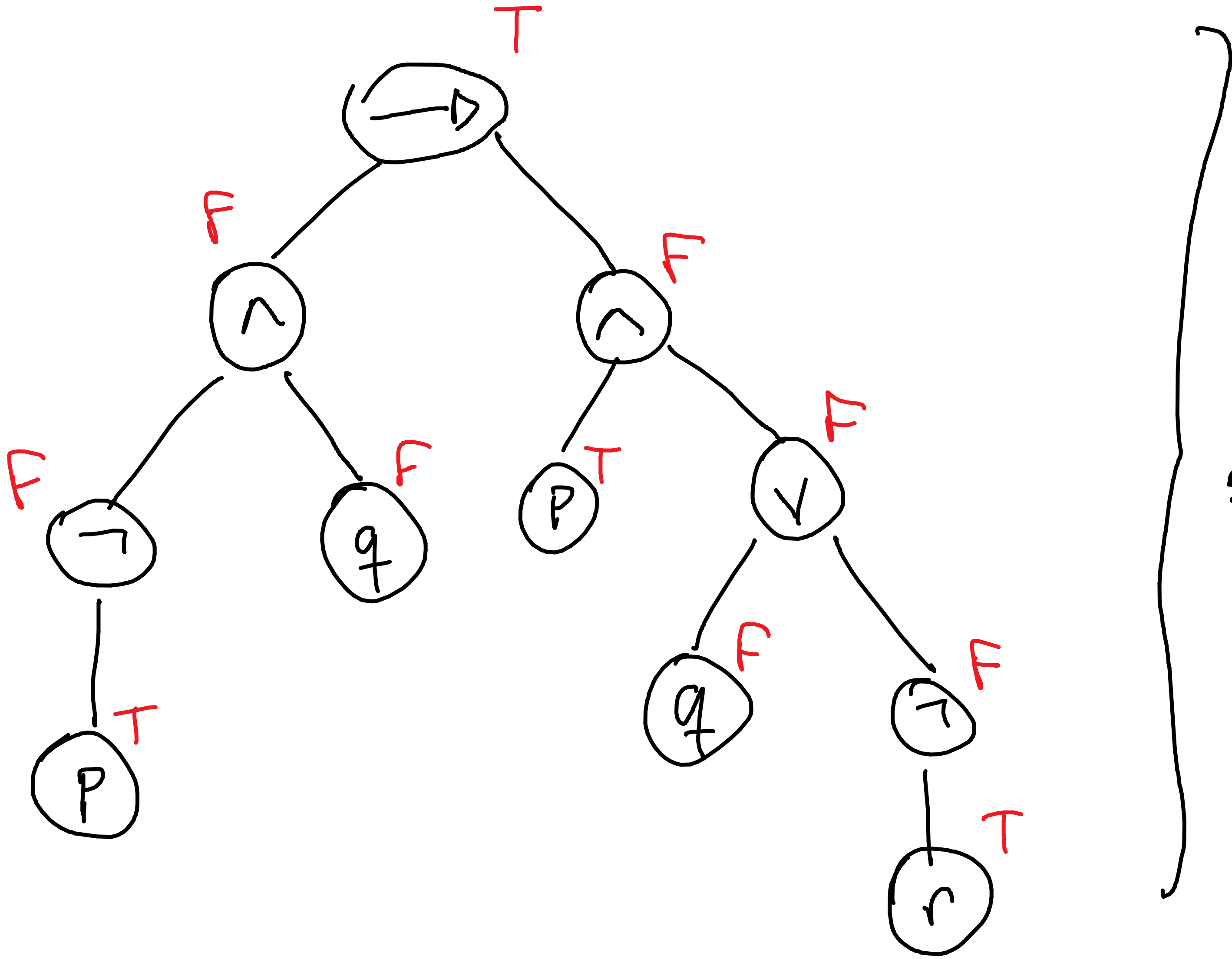
TABELA VERDADE

- DADA FÓRMULA ϕ COM ÁTOMOS PROPOSICIONAIS $p_1, \ldots, p_n$, PODEMOS CONSTRUIR UMA TABELA VERDADE PARA ϕ.

- TEREMOS $\underline{2^n}$ LINHAS, CADA UMA COM UMA DAS POSSÍVEIS COMBINAÇÕES DE T E F PARA $p_1, \ldots, p_n$.

- QUANDO n É GRANDE, CONSTRUIR ESTA TABELA VERDADE É COMPUTACIONALMENTE INVIÁVEL.

EX: $((\neg p) \wedge q) \rightarrow (p \wedge (q \vee (\neg r)))$ $p \leftarrow T,\ q \leftarrow F,\ r \leftarrow T$



ALTURA $= 5$

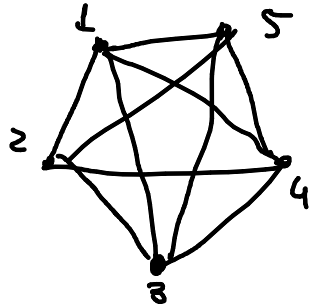
EX: TABELA VERDADE p/ $((p \to (\neg q)) \to (q \vee (\neg p)))$

SUBFÓRMULAS

p, q, $\neg q$, $\neg p$, $(p \to (\neg q))$, $(q \vee (\neg p))$, $((p \to (\neg q)) \to (q \vee (\neg p)))$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to (\neg q)$	$q \vee (\neg p)$	$(p \to \neg q) \to (q \vee \neg p)$
T	T	F	F	F	T	T
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

INDUÇÃO MATEMÁTICA



n escolhe 2

EX: $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2} = \dbinom{n+1}{2}$

COMO PROVAMOS ESTA FÓRMULA?

→ SUPONHA QUE QUEREMOS PROVAR UMA PROPRIEDADE M QUE ACREDITAMOS SER VÁLIDA PARA TODOS OS NATURAIS.

→ ESCREVEMOS $M(5)$ PARA DIZER QUE M VALE PARA 5.

→ SUPONHA QUE SABEMOS DUAS COISAS:

1. CASO BASE: O NÚMERO 1 POSSUI A PROPRIEDADE M, i.e., TEMOS UMA PROVA PARA $M(1)$

2. PASSO INDUTIVO: SE n É NÚMERO QUE ASSUMIMOS TER A PROPRIEDADE

→ SUPONHA QUE QUEREMOS PROVAR UMA PROPRIEDADE M QUE ACREDITAMOS SER VÁLIDA PARA TODOS OS NATURAIS.

→ SUPONHA QUE SABEMOS DUAS COISAS:

1. CASO BASE: O NÚMERO 1 POSSUI A PROPRIEDADE M, i.e., TEMOS UMA PROVA PARA $M(1)$

2. PASSO INDUTIVO: SE n É UM NÚMERO QUE ASSUMIMOS TER A PROPRIEDADE M, ENTÃO PODEMOS MOSTRAR QUE $n+1$ TEM A PROPRIEDADE M, i.e., TEMOS UMA PROVA DE $M(n) \to M(n+1)$

DEF: O PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA DIZ QUE DADAS ESSAS DUAS INFORMAÇÕES, TODO NÚMERO NATURAL TEM A PROPRIEDADE M

→ A SUPOSIÇÃO EM 2 DE QUE "n TEM A PROPRIEDADE M" É CHAMADA DE HIPÓTESE DE INDUÇÃO

TEOREMA: A soma $1+2+\cdots+n$ é igual a $\frac{n(n+1)}{2}$ para todo n.

PROVA: Escrevemos

LEFT HAND SIDE

LHS_n para $1+2+\cdots+n$ e

RHS_n para $\frac{n(n+1)}{2}$

RIGHT HAND SIDE

Queremos mostrar que $LHS_n = RHS_n$ para todo natural n.

$M(i)$: $LHS_i = RHS_i$

CASO BASE: $M(1)$ vale: de fato $LHS_1 = 1 = \frac{1(1+1)}{2} = RHS_1$

PASSO INDUTIVO: Suponha que $M(n)$ é válido, i.e., $\underbrace{LHS_n = RHS_n}_{\text{HIPÓTESE DE INDUÇÃO}}$

Note que $LHS_{n+1} = 1+2+\cdots+n+(n+1)$

$$= LHS_n + (n+1)$$

$$= RHS_n + (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+2)(n+1)}{2} = RHS_{n+1}$$

$$\frac{M(1) \qquad M(1) \to M(2)}{\dfrac{M(2) \qquad M(2) \to M(3)}{M(3)}}$$

Pelo Princípio da Indução Matemática, $LHS_n = RHS_n$ para todo $n \geq 1$. ∎

OBS: VARIAÇÃO QUANDO O CASO BASE É DIFERENTE DE 1.

→ HÁ UMA OUTRA VARIAÇÃO NA QUAL A HIPÓTESE DE INDUÇÃO É

$$M(1) \wedge M(2) \wedge \cdots \wedge M(n)$$

EX: AS FÓRMULAS BEM FORMADAS POSSUEM A PROPRIEDADE DE QUE $\underbrace{\#(= \#)}_{\text{"O NÚMERO DE"}}$

PARA PROVAR ISSO, TEMOS QUE RELACIONAR FÓRMULAS BEM FORMADAS COM NÚMEROS NATURAIS.

DEF: DADA UMA FÓRMULA BEM FORMADA ϕ, A ALTURA DE ϕ É 1+ O COMPRIMENTO DO MAIOR CAMINHO DE UMA RAIZ PARA UMA FOLHA EM SUA ÁRVORE DE PARSE.

TEOREMA: TODA FÓRMULA BEM FORMADA POSSUI O MESMO NÚMERO DE (E).

PROVA: SEJA $M(n)$ A PROPRIEDADE "TODA FÓRMULA DE ALTURA n TEM O MESMO NÚMERO DE (E)"

CASO BASE: $n = 1$. ENTÃO ϕ É UM ÁTOMO PROPOSICIONAL E NÃO POSSUI (NEM). COMO $0 = 0$, ENTÃO $M(1)$ É VÁLIDO.

PASSO INDUTIVO: $n > 1$ E SUPONHA QUE $M(1) \wedge \ldots \wedge M(n)$ É VÁLIDO.

A RAIZ DA ÁRVORE DE ANÁLISE DE ϕ DEVE SER $\neg$, $\rightarrow$, $\wedge$, OU $\vee$, POIS ϕ É BEM FORMADA

ASSUMA QUE SEJA $\rightarrow$.

ENTÃO ϕ É IGUAL A $(\phi_1 \rightarrow \phi_2)$

SEJA $M(n)$ A PROPRIEDADE

"TODA FÓRMULA DE ALTURA n TEM O MESMO NÚMERO DE (E)"

PASSO INDUTIVO: SUPONHA QUE $M(1) \wedge \ldots \wedge M(n)$ É VÁLIDO, E SEJA ϕ QUALQUER FÓRMULA BEM FORMADA COM ALTURA $n+1$.

A RAIZ DA ÁRVORE DE ANÁLISE DE ϕ DEVE SER $\neg$, $\rightarrow$, $\wedge$, OU $\vee$, POIS ϕ É BEM FORMADA

ASSUMA QUE SEJA $\rightarrow$.

ENTÃO ϕ É IGUAL A $(\phi_1 \rightarrow \phi_2)$ EM QUE ϕ_1 E ϕ_2 SÃO BEM FORMADAS.

CLARAMENTE AS ALTURAS DE ϕ_1 E ϕ_2 SÃO NO MÁXIMO n. LOGO, ϕ_1 E ϕ_2 POSSUEM OS MESMOS NÚMEROS DE (E). LOGO ϕ TAMBÉM POSSUI.

PORTANTO $M(n+1)$ É VÁLIDO. ∎