~~Solidez~~ **CORRETUDE DA LÓGICA PROPOSICIONAL** $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi$

DEF: SE PARA TODAS AS AVALIAÇÕES EM QUE $\phi_1, \ldots, \phi_n$ SÃO AVALIADAS EM T TEMOS QUE ψ É AVALIADO EM T, DIZEMOS QUE VALE

$$\phi_1, \ldots, \phi_n \vDash \psi$$

↳ VINCULAÇÃO SEMÂNTICA

EX:

1. $\underbrace{p \wedge q}_{\phi_1} \vDash \underbrace{p}_{\psi}$? SIM, POIS SE $p \wedge q$ É AVALIADO EM T, ENTÃO p É AVALIADO EM T.

2. $p \vee q \vDash p$? NÃO. SE p VALE F E q VALE T, ENTÃO ϕ VALE T E ψ VALE F

EX:

1 $\underbrace{p \wedge q}_{\phi} \models \underbrace{p}_{\psi}$? SIM, POIS SE $p \wedge q$ É AVALIADO EM T, ENTÃO p É AVALIADO EM T.

2. $p \vee q \models p$? NÃO. SE p VALE F E q VALE T, ENTÃO ϕ VALE T E ψ VALE F

p	q	$p \wedge q$ (ϕ)	p (ψ)
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	F
F	F	F	F

p	q	$p \vee q$ (ϕ)	p (ψ)
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	F
F	F	F	F

3. $\neg q, p \vee q \vDash p$? SIM, POIS SE $\neg q$ VALE T, ENTÃO q VALE F, E ENTÃO SE $p \vee q$ VALE T, p DEVE VALER T.

4. $p \vDash q \vee \neg q$? SIM, PORQUE $q \vee \neg q$ VALE SEMPRE T

		ϕ_1	ϕ_2	ψ
p	q	$\neg q$	$p \vee q$	p
T	T	F	T	T
T	F	T	T	T
F	T	F	T	F
F	F	T	F	F

p	q	$\neg q$	$q \vee \neg q$
T	T	F	T
T	F	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T

Objetivo 1: Mostrar que se $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi$,

então $\phi_1, \ldots, \phi_n \vDash \psi$.

Teorema: Sejam $\phi_1, \ldots, \phi_n$ e ψ fórmulas da lógica proposicional.

Se $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi$ é válido, então $\phi_1, \ldots, \phi_n \vDash \psi$ vale.

Prova: Como $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi$ é válido, existe uma prova de ψ a partir das premissas $\phi_1, \ldots, \phi_n$.

o número de linhas

A prova segue por indução (forte) no comprimento da prova

Vamos provar o seguinte

$M(k)$ = "Para todos os sequentes $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi$ $(n \geq 0)$ que têm uma prova de comprimento k, temos $\phi_1, \ldots, \phi_n \vDash \psi$"

$M(K)$ = "PARA TODOS OS SEQUENTES $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \psi$ $(n \geq 0)$ QUE TÊM UMA PROVA DE COMPRIMENTO K, TEMOS $\phi_1, \dots, \phi_n \vDash \psi$"

CASO: $M(1)$. PROVA DE UMA LINHA

1	ϕ	PREMISSA

ENTÃO ϕ_1 E ψ SÃO IGUAIS: $\phi \vdash \phi$

CERTAMENTE ϕ VALE T APENAS QUANDO ψ VALE T.

LOGO $\phi \vDash \psi$.

PASSO INDUTIVO: A PROVA TEM K LINHAS

1	ϕ_1	PREMISSA
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	ϕ_n	PREMISSA
	$\vdots$	
K	ψ	JUSTIFICATIVA

ϕ DIVIDIMOS A PROVA DE ACORDO COM A JUSTIFICATIVA

$M(k)$ = "Para todos os sequentes $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi$ $(n \geq 0)$ que têm uma prova de comprimento k, temos $\phi_1, \ldots, \phi_n \models \psi$"

<u>Passo indutivo:</u> A prova tem k linhas

	1	ϕ_1	premissa
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	n	ϕ_n	premissa
$\psi_1 \rightarrow$		$\vdots$	
$\psi_2 \rightarrow$			
	k	ψ	justificativa

Dividimos a prova de acordo com a justificativa

1. Suponha que a última regra aplicada (a justificativa) é $\wedge i$.

Então $\psi = \psi_1 \wedge \psi_2$. Em alguma linha, digamos k_1, concluímos ψ_1, e em alguma outra linha, digamos k_2, concluímos ψ_2.

Logo, temos que $\overbrace{\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi_1}^{k_1 \text{ linhas}}$ e $\overbrace{\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi_2}^{k_2 \text{ linhas}}$

claramente $k_1, k_2 < k$.

Pela hipótese de indução, temos $\underline{\phi_1, \ldots, \phi_n} \models \underline{\psi_1}$ e $\phi_1, \ldots, \phi_n \models \underline{\psi_2}$

Mas isso implica que $\phi_1, \ldots, \phi_n \models \psi$

2. SE A ÚLTIMA REGRA FOI $\vee E$:

1	ϕ_1	PREMISSA
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	ϕ_m	PREMISSA
	$\vdots$	
k'	$\psi_1 \vee \psi_2$	——
$k'+1$	ψ_1	SUPOSIÇÃO
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k_1	ψ	
k_1+1	ψ_2	SUPOSIÇÃO
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$k-1$	ψ	
k	ψ	$\wedge E, r'$

ENTÃO PROVAMOS ANTERIORMENTE $\psi_1 \vee \psi_2$

NA LINHA $k' < k$

ENTÃO HÁ UMA PROVA CURTA DE $\psi_1 \vee \psi_2$ EM k' LINHAS

I.E., $\phi_1, \ldots, \phi_m \vdash \psi_1 \vee \psi_2$.

E TAMBÉM OS SEQUENTES

$$\phi_1, \ldots, \phi_m, \psi_1 \vdash \psi \quad \text{E} \quad \phi_1, \ldots, \phi_m, \psi_2 \vdash \psi$$

TÊM PROVAS COM NO MÁXIMO $k-1$ LINHAS

PELA HIPÓTESE DE INDUÇÃO TEMOS

$$\phi_1, \ldots, \phi_m \vDash \psi_1 \vee \psi_2, \quad \phi_1, \ldots, \phi_m, \psi_1 \vDash \psi, \quad \phi_1, \ldots, \phi_m, \psi_2 \vDash \psi$$

MAS ISSO IMPLICA QUE $\phi_1, \ldots, \phi_m \vDash \psi$

3. TESTAR TODAS AS DEMAIS FÓRMULAS ANALOGAMENTE.

Teorema: sejam $\phi_1, \ldots, \phi_n$ e ψ fórmulas da lógica proposicional.

Se $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi$ é válido, então $\phi_1, \ldots, \phi_n \models \psi$ vale.

→ É útil para mostrar que não existe prova para um sequente

é suficiente encontrar atribuições nas quais ϕ_i valem T para todo $i = 1, \ldots, n$, mas que ψ vale F.

Pela definição de $\models$, não vale $\phi_1, \ldots, \phi_n \models \psi$.

Logo, $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi$ não pode ser válido.

COMPLETUDE DA LÓGICA PROPOSICIONAL

OBJETIVO 2: MOSTRAR QUE SE $\phi_1, \ldots, \phi_n \models \psi$,

ENTÃO $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi$.

→ OU SEJA, QUE SE $\phi_1, \ldots, \phi_n \models \psi$, ENTÃO EXISTE UMA PROVA POR DEDUÇÃO NATURAL.

→ VAMOS OBTER QUE

$\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi$ SE E SOMENTE SE $\phi_1, \ldots, \phi_n \models \psi$