COMPLETUDE DA LÓGICA PROPOSICIONAL

OBJETIVO 2: MOSTRAR QUE SE $\phi_1, \ldots, \phi_n \models \psi$,

ENTÃO $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi$.

→ OU SEJA, QUE SE $\phi_1, \ldots, \phi_n \models \psi$, ENTÃO EXISTE UMA PROVA POR DEDUÇÃO NATURAL.

→ VAMOS OBTER QUE

$\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi$ SE E SOMENTE SE $\phi_1, \ldots, \phi_n \models \psi$

DEF: Uma fórmula ϕ da lógica proposicional é uma TAUTOLOGIA se todas as suas avaliações dão T, i.e., $\models \phi$.

EX: $p \vee \neg p$

$$(q \to (p \to q))$$

1	q	suposição
2	p	suposição
3	q	cópia 1
4	$p \to q$	$\to i$ 2-3
	$q \to (p \to q)$	$\to i$ 1-4

$$\vdash (q \to (p \to q))$$

$$\models (q \to (p \to q))$$

→ Daqui para frente, assuma que $\phi_1, \ldots, \phi_n \models \psi$ e queremos construir uma uma prova para $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi$.

→ Daqui para frente, assuma que $\phi_1, \dots, \phi_n \models \psi$

e queremos construir uma uma prova para $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \psi$.

Estratégia

1) Mostrar que $\models (\phi_1 \to (\phi_2 \to (\phi_3 \cdots (\phi_n \to \psi))))$

i.e., $(\phi_1 \to (\phi_2 \to (\phi_3 \cdots (\phi_n \to \psi))))$ é uma tautologia

2) Mostrar que $\vdash (\phi_1 \to (\phi_2 \to (\phi_3 \cdots (\phi_n \to \psi))))$

i.e., $(\phi_1 \to (\phi_2 \to (\phi_3 \cdots (\phi_n \to \psi))))$ é um teorema

3) Concluir que $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \psi$

$$\vdash (q \to \underbrace{(p \to q)})$$

1	q	SUPOSIÇÃO
2	p	SUPOSIÇÃO
3	q	CÓPIA 1
4	$p \to q$	$\to i$ 2-3
5	$q \to (p \to q)$	$\to i$ 1-4

$$q \vdash (p \to q)$$

1	q	PREMISSA
2	p	SUPOSIÇÃO
3	q	CÓPIA 1
4	$p \to q$	$\to i$ 2-3

$$q, p \vdash q$$

1	q	PREMISSA
2	p	PREMISSA
3	q	CÓPIA 1

1) MOSTRAR QUE $\models (\phi_1 \to (\phi_2 \to (\phi_3 \cdots (\phi_n \to \psi))))$

i.e., $(\phi_1 \to (\phi_2 \to (\phi_3 \cdots (\phi_n \to \psi))))$ É UMA TAUTOLOGIA

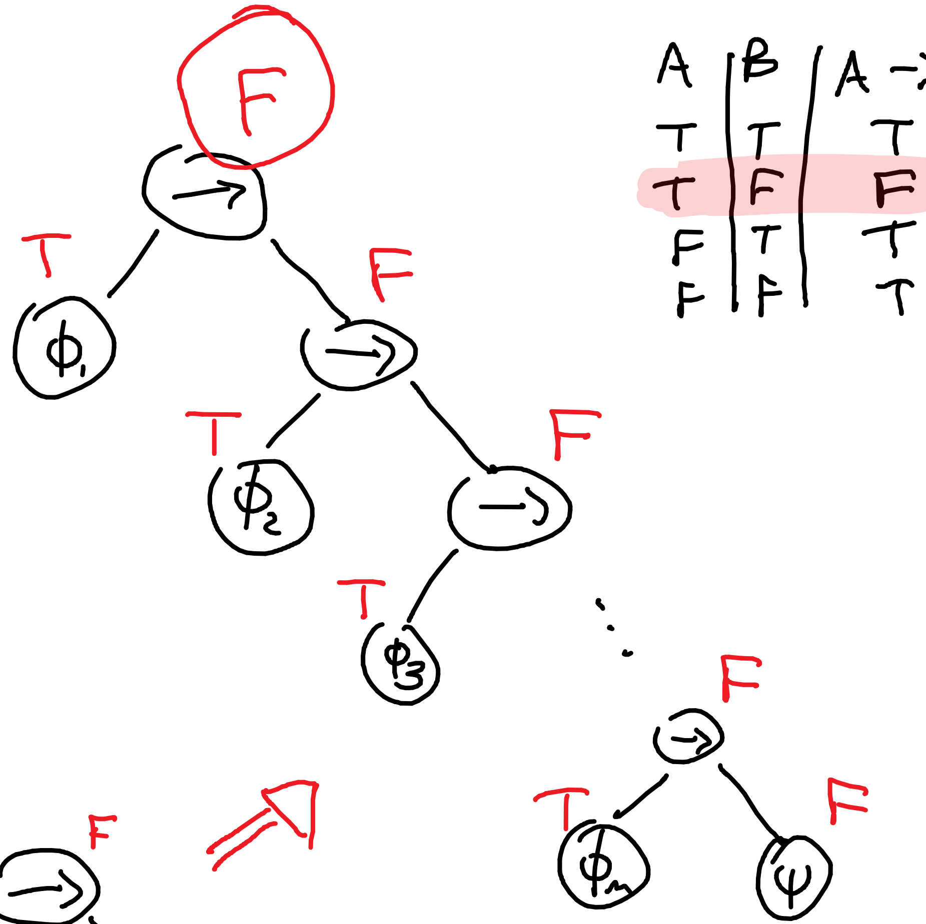
A	B	A → B
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

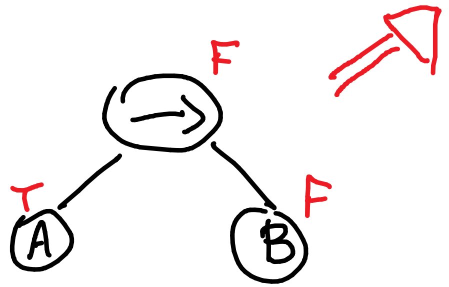
COMO $(\phi_1 \to (\phi_2 \to (\phi_3 \cdots (\phi_n \to \psi))))$ É UM CONJUNTO DE IMPLICAÇÕES ANINHADAS, ELA SÓ SERÁ AVALIADA EM F QUANDO

$\phi_1 = \cdots = \phi_n = T$ E $\psi = F$

ISSO NÃO PODE ACONTECER PORQUE $\phi_1, \ldots, \phi_n \models \psi$

T T T T   T





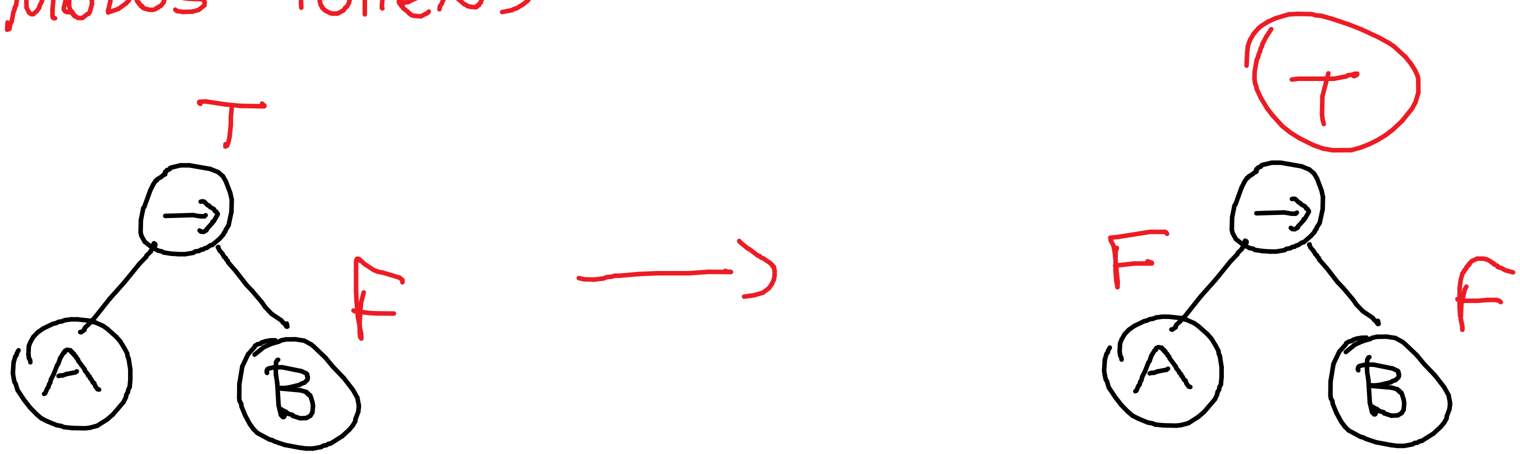
Modus Ponens

Premissa

Coclusão

$$\frac{A \qquad A \to B}{B}$$

Modus Tollens



Premissa

$$\frac{A \to B \qquad \neg B}{\neg A}$$

2) MOSTRAR QUE $\vdash (\phi_1 \to (\phi_2 \to (\phi_3 \cdots (\phi_m \to \psi))))$

i.e., $(\phi_1 \to (\phi_2 \to (\phi_3 \cdots (\phi_m \to \psi))))$ É UM TEOREMA

IDEIA: SE $\models \eta$ ENTÃO $\vdash \eta$ (SE η É UMA TAUTOLOGIA, ENTÃO η É UM TEOREMA)

SUPONHA QUE η É FORMADA DE n ÁTOMOS PROPOSICIONAIS

$$p_1, \ldots, p_n$$

SE VALE $\models \eta$, ENTÃO η É AVALIADA EM T EM TODAS AS LINHAS DA TABELA VERDADE.

COMO USAMOS ISSO PARA CONSTRUIR UMA PROVA PARA η?

$\rightsquigarrow$ VAMOS OBTER 2^n PROVAS (UMA PARA CADA LINHA DA TABELA) E DEPOIS COMBINÁ-LAS.

PROP: SEJA ϕ UMA FÓRMULA COM ÁTOMOS PROPOSICIONAIS $p_1, \dots, p_n$. FIXE UMA LINHA ℓ DA TABELA VERDADE.

PARA CADA $i = 1, \dots, n$, SEJA

$$\hat{p}_i = \begin{cases} p_i & \text{SE } p_i \text{ VALE } T \text{ NA LINHA } \ell \\ \neg p_i & \text{SE } p_i \text{ VALE } F \text{ NA LINHA } \ell \end{cases}$$

TEMOS

1) $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n \vdash \phi$ SE ϕ VALE T NA LINHA ℓ

2) $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n \vdash \neg\phi$ SE ϕ VALE F NA LINHA ℓ

PROP: Seja ϕ uma fórmula com átomos proposicionais $p_1, \dots, p_n$. Fixe uma linha ℓ da tabela verdade.

Para cada $i = 1, \dots, n$, seja

$$\hat{p}_i = \begin{cases} p_i & \text{se } p_i \text{ vale } T \text{ na linha } \ell \\ \neg p_i & \text{se } p_i \text{ vale } F \text{ na linha } \ell \end{cases}$$

Temos

1) $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n \vdash \phi$ se ϕ vale T na linha ℓ
2) $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n \vdash \neg\phi$ se ϕ vale F na linha ℓ

$$(p \vee q) \wedge r = \phi$$

p	q	r	ϕ
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	F

1	p	Premissa
2	$\neg q$	Premissa
3	r	Premissa
4	$p \vee q$	$\vee i_1$ 1
5	$(p \vee q) \wedge r$	$\wedge i$ 4,3

$$p, \neg q, r \vdash (p \vee q) \wedge r$$

1	$\neg p$	Premissa
2	q	Premissa
3	$\neg r$	Premissa
4	$(p \vee q) \wedge r$	Suposição
5	r	$\wedge e_2$ 4
6	$\perp$	$\neg$ 3,5
7	$\neg((p \vee q) \wedge r)$	P.P.C

$$\neg p, q, \neg r \vdash \neg((p \vee q) \wedge r)$$

Prova: Indução na estrutura da fórmula ϕ (na altura da árvore de parse)

1) Se ϕ é um átomo proposicional p, então

p	ϕ
T	T
F	F

$p \vdash p$

$\neg p \vdash \neg p$

$\phi = \neg(p \vee q)$

$\phi' = (p \vee q)$

2) Se ϕ é da forma $\neg\phi'$, então $\phi = T$ se e só se $\phi' = F$

Suponha que (na linha ℓ) ϕ é avaliado em T. Então ϕ' é F.

Pela hipótese de indução $\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_m \vdash \neg\phi'$ mas $\neg\phi' = \phi$

Se ϕ é valiado em F, então ϕ' é avaliado em T.

Pela Hip. de indução $\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_m \vdash \phi' \vdash \neg\neg\phi' \vdash \neg\phi$

p	q	$(p \vee q)$	$\neg(p \vee q)$
T	T	T	F
T	F	T	F
F	T	T	F
F	F	F	T

H.I.: $\neg p, \neg q \vdash \neg\underbrace{\underbrace{(p \vee q)}_{\phi'}}_{\phi}$

H.I. $p, \neg q \vdash (p \vee q)$

$\vdash \neg(\neg(p \vee q)) = \neg\phi$