COMPLETUDE DA LÓGICA PROPOSICIONAL

OBJETIVO 2: MOSTRAR QUE SE $\phi_1, \ldots, \phi_n \models \psi$,
ENTÃO $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi$.

→ OU SEJA, QUE SE $\phi_1, \ldots, \phi_n \models \psi$, ENTÃO EXISTE UMA PROVA POR DEDUÇÃO NATURAL.

→ VAMOS OBTER QUE

$\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi$ SE E SOMENTE SE $\phi_1, \ldots, \phi_n \models \psi$

DEF: Uma fórmula ϕ da lógica proposicional é uma TAUTOLOGIA se todas as suas avaliações dão T, i.e., $\models \phi$.

EX: $p \vee \neg p$

$(q \to (p \to q))$

1	q	suposição
2	p	suposição
3	q	cópia 1
4	$p \to q$	$\to i$ 2-3
	$q \to (p \to q)$	$\to i$ 1-4

$\vdash (q \to (p \to q))$

$\models (q \to (p \to q))$

→ Daqui para frente, assuma que $\phi_1, \ldots, \phi_n \models \psi$ e queremos construir uma uma prova para $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi$.

→ DAQUI PARA FRENTE, ASSUMA QUE $\phi_1, \ldots, \phi_n \models \psi$

E QUEREMOS CONSTRUIR UMA UMA PROVA PARA $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi$.

ESTRATÉGIA

1) MOSTRAR QUE $\models (\phi_1 \to (\phi_2 \to (\phi_3 \cdots (\phi_n \to \psi))))$

i.e., $(\phi_1 \to (\phi_2 \to (\phi_3 \cdots (\phi_n \to \psi))))$ É UMA TAUTOLOGIA

2) MOSTRAR QUE $\vdash (\phi_1 \to (\phi_2 \to (\phi_3 \cdots (\phi_n \to \psi))))$

i.e., $(\phi_1 \to (\phi_2 \to (\phi_3 \cdots (\phi_n \to \psi))))$ É UM TEOREMA

3) CONCLUIR QUE $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi$

$\vdash (q \to \underbrace{(p \to q)})$

1	q	SUPOSIÇÃO
2	p	SUPOSIÇÃO
3	q	CÓPIA 1
4	$p \to q$	$\to i$ 2-3
5	$q \to (p \to q)$	$\to i$ 1-4

$q \vdash (p \to q)$

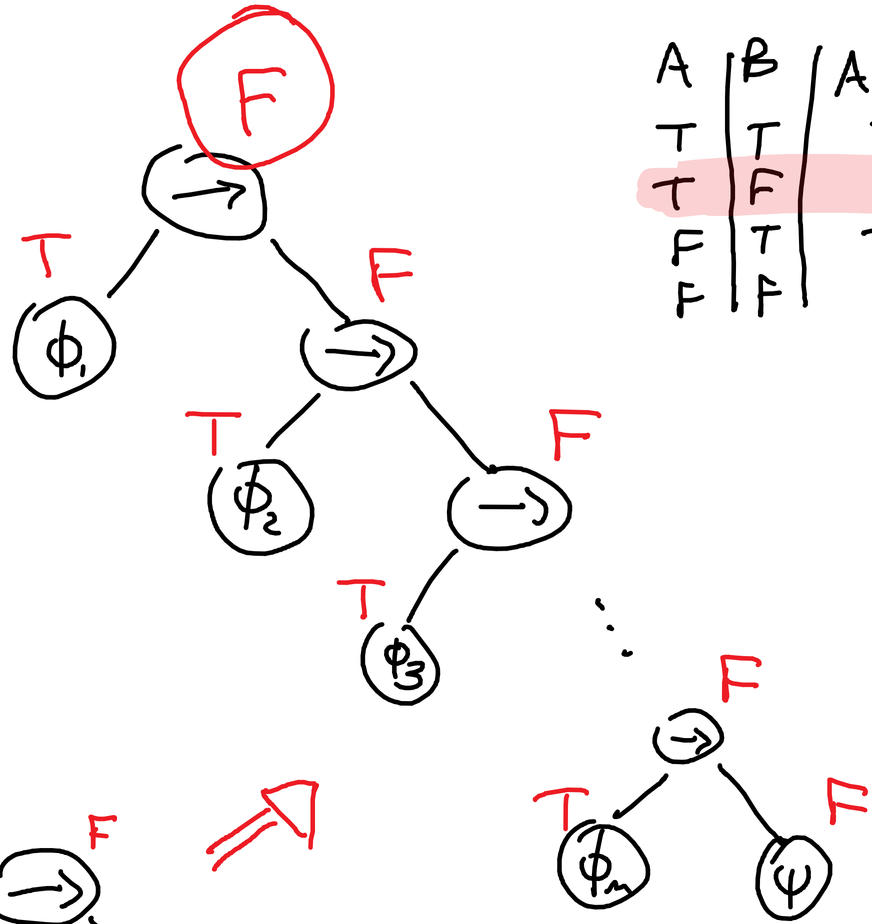
1	q	PREMISSA
2	p	SUPOSIÇÃO
3	q	CÓPIA 1
4	$p \to q$	$\to i$ 2-3

$q, p \vdash q$

1	q	PREMISSA
2	p	PREMISSA
3	q	CÓPIA 1

1) Mostrar que $\models (\phi_1 \to (\phi_2 \to (\phi_3 \cdots (\phi_n \to \psi))))$

i.e., $(\phi_1 \to (\phi_2 \to (\phi_3 \cdots (\phi_n \to \psi))))$ é uma tautologia

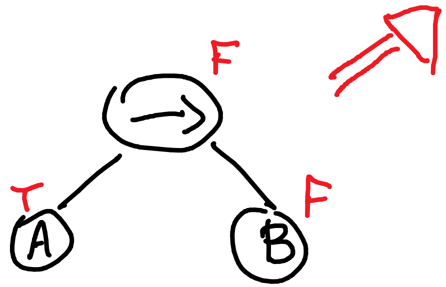


A	B	A → B
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

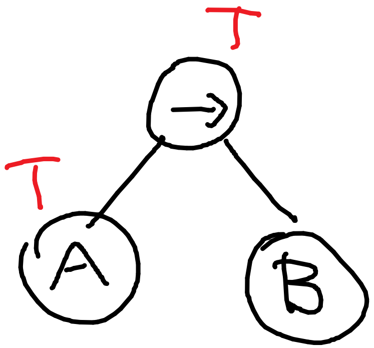
Como $(\phi_1 \to (\phi_2 \to (\phi_3 \cdots (\phi_n \to \psi))))$ é um conjunto de implicações aninhadas, ela só será avaliada em F quando

$\phi_1 = \cdots = \phi_n = T$ e $\psi = F$

Isso não pode acontecer porque $\underbrace{\phi_1, \ldots, \phi_n}_{T\ T\ T\ T} \models \underset{T}{\psi}$

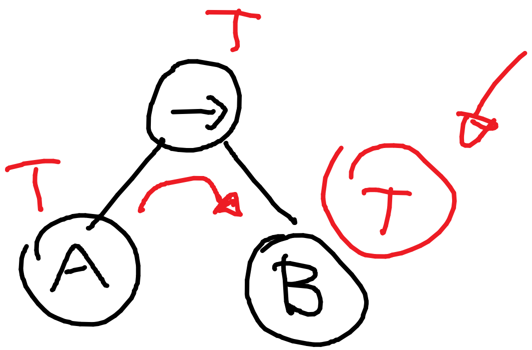


MODUS PONENS



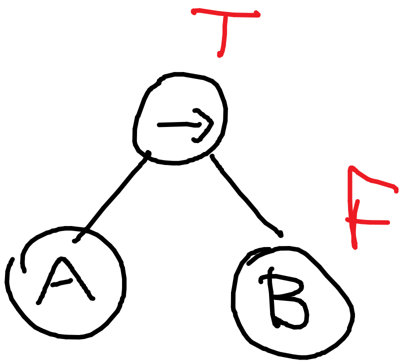
PREMISSA

$$\frac{A \qquad A \to B}{B}$$



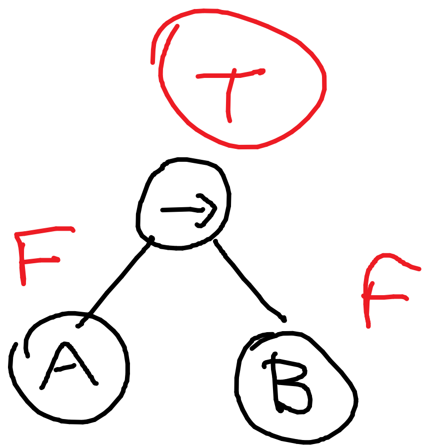
COCLUSÃO

MODUS TOLLENS



PREMISSA

$$\frac{A \to B \qquad \neg B}{\neg A}$$



2) MOSTRAR QUE $\vdash (\phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow (\phi_3 \cdots (\phi_m \rightarrow \psi))))$

i.e., $(\phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow (\phi_3 \cdots (\phi_m \rightarrow \psi))))$ É UM TEOREMA

IDEIA: SE $\models \eta$ ENTÃO $\vdash \eta$ (SE η É UMA TAUTOLOGIA, ENTÃO η É UM TEOREMA)

SUPONHA QUE η É FORMADA DE n ÁTOMOS PROPOSICIONAIS

$$p_1, \dots, p_n$$

SE VALE $\models \eta$, ENTÃO η É AVALIADA EM T EM TODAS AS LINHAS DA TABELA VERDADE.

COMO USAMOS ISSO PARA CONSTRUIR UMA PROVA PARA η?

$\rightsquigarrow$ VAMOS OBTER 2^n PROVAS (UMA PARA CADA LINHA DA TABELA) E DEPOIS COMBINÁ-LAS.

PROP: SEJA ϕ UMA FÓRMULA COM ÁTOMOS PROPOSICIONAIS $p_1, \ldots, p_n$. FIXE UMA LINHA ℓ DA TABELA VERDADE.

PARA CADA $i = 1, \ldots, n$, SEJA

$$\hat{p}_i = \begin{cases} p_i & \text{SE } p_i \text{ VALE } T \text{ NA LINHA } \ell \\ \neg p_i & \text{SE } p_i \text{ VALE } F \text{ NA LINHA } \ell \end{cases}$$

TEMOS

1) $\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_n \vdash \phi$ SE ϕ VALE T NA LINHA ℓ

2) $\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_n \vdash \neg\phi$ SE ϕ VALE F NA LINHA ℓ

Prop: Seja ϕ uma fórmula com átomos proposicionais $p_1, \dots, p_n$. Fixe uma linha ℓ da tabela verdade.

Para cada $i = 1, \dots, n$, seja

$$\hat{p}_i = \begin{cases} p_i & \text{se } p_i \text{ vale } T \text{ na linha } \ell \\ \neg p_i & \text{se } p_i \text{ vale } F \text{ na linha } \ell \end{cases}$$

Temos

1) $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n \vdash \phi$ se ϕ vale T na linha ℓ
2) $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n \vdash \neg\phi$ se ϕ vale F na linha ℓ

$$(p \vee q) \wedge r = \phi$$

p	q	r	ϕ
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	F

$$p, \neg q, r \vdash (p \vee q) \wedge r$$

1	p	premissa
2	$\neg q$	premissa
3	r	premissa
4	$p \vee q$	$\vee i_1$ 1
5	$(p \vee q) \wedge r$	$\wedge i$ 4,3

$$\neg p, q, \neg r \vdash \neg((p \vee q) \wedge r)$$

1	$\neg p$	premissa
2	q	premissa
3	$\neg r$	premissa
4	$(p \vee q) \wedge r$	suposição
5	r	$\wedge e_2$ 4
6	$\perp$	$\neg e$ 3,5
7	$\neg((p \vee q) \wedge r)$	P.P.C

Prova: Indução na estrutura da fórmula ϕ (na altura da árvore de parse)

1) Se ϕ é um átomo proposicional p, então

p	ϕ
T	T
F	F

$p \vdash p$

$\neg p \vdash \neg p$

$\phi = \neg(p \vee q)$

$\phi' = (p \vee q)$

2) Se ϕ é da forma $\neg\phi'$, então $\phi = T$ se e só se $\phi' = F$

Suponha que (na linha ℓ) ϕ é avaliado em T. Então ϕ' é F.

Pela Hipótese de indução $\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_n \vdash \neg\phi'$ mas $\neg\phi' = \phi$

Se ϕ é avaliado em F, então ϕ' é avaliado em T.

Pela Hip. de indução $\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_n \vdash \phi' \vdash \neg\neg\phi' \vdash \neg\phi$

p	q	$(p \vee q)$	$\neg(p \vee q)$
T	T	T	F
T	F	T	F
F	T	T	F
F	F	F	T

HI.: $\neg p, \neg q \vdash \underbrace{\neg(\underbrace{p \vee q}_{\phi'})}_{\phi}$

H.I. $p, \neg q \vdash (p \vee q)$

$\vdash \neg(\neg(p \vee q)) = \neg\phi$

1	$p \rightarrow (q \wedge r)$	PREMISSA
2	p	SUPOSIÇÃO
3	$q \wedge r$	$\rightarrow E$ 2. 1
4	q	$\wedge E_1$ 3
5	$p \rightarrow q$	$\rightarrow i$ 2-4
6	$\neg q \wedge r$	SUPOSIÇÃO
7	$\neg q$	$\wedge E_1$ 2
8	$\neg p$	M.T. 5, 7
9	$(\neg q \wedge r) \rightarrow \neg p$	$\rightarrow i$ 6-8

3) ϕ É DA FORMA $\phi_1 \to \phi_2$.

FIXE UMA LINHA DA TABELA VERDADE.

p_1	p_2	... p_m	ϕ_1	ϕ_2	ϕ
			T	F	F

SE ϕ É AVALIADO EM F ENTÃO ϕ_1 VALE T E ϕ_2 VALE F.

PELA H.I. EXISTEM PROVAS PARA OS SEQUENTES

$$\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_m \vdash \phi_1 \quad \text{E} \quad \underline{\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_m \vdash \neg\phi_2}$$

1	$\phi_1 \wedge \neg\phi_2$	PREMISSA
2	ϕ_1	
3	$\neg\phi_2$	
4	$\phi_1 \to \phi_2$	SUPOSIÇÃO
5	ϕ_2	$\to$E 2,4
6	$\perp$	$\neg$E 3,4
7	$\neg(\phi_1 \to \phi_2)$	PPC

ENTÃO TEMOS

$$\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_m \vdash \underbrace{\phi_1 \wedge \neg\phi_2} \vdash \underbrace{\neg(\phi_1 \to \phi_2)}_{\neg\phi}$$

SE ϕ É AVALIADO EM T. ϕ É DA FORMA $\phi_1 \to \phi_2$.

HÁ TRÊS CASOS (ϕ_1, ϕ_2) É AVALIADO EM (T,T), (F,T), (F,F)

FF : HI. $\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_n \vdash \neg\phi_1$ E $\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_n \vdash \neg\phi_2$

LOGO, $\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_n \vdash \neg\phi_1 \wedge \neg\phi_2 \vdash \underbrace{\phi_1 \to \phi_2}_{\phi}$

1	$\neg\phi_1 \wedge \neg\phi_2$	PREMISSA
2	$\neg\phi_1$	$\wedge E$
4	ϕ_1	SUPOSIÇÃO
5	$\bot$	$\neg E$ 2,4
6	ϕ_2	$\bot E$ 5
7	$\phi_1 \to \phi_2$	

TT : HI. $\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_n \vdash \phi_1$ E $\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_n \vdash \phi_2$

LOGO, $\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_n \vdash \phi_1 \wedge \phi_2 \vdash \underbrace{\phi_1 \to \phi_2}_{\phi}$

$\phi_1 \wedge \phi_2$	PREMISSA
ϕ_2	$\wedge E$
ϕ_1	SUPOSIÇÃO
ϕ_2	CÓPIA
$\phi_1 \to \phi_2$	$\to i$

FT : HI. $\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_n \vdash \neg\phi_1$ E $\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_n \vdash \phi_2$

LOGO, $\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_n \vdash \neg\phi_1 \wedge \phi_2 \vdash \underbrace{\phi_1 \to \phi_2}_{\phi}$

$\neg\phi_1 \wedge \phi_2$	PREMISSA
ϕ_2	$\wedge E$
ϕ_1	SUPOSIÇÃO
ϕ_2	CÓPIA
$\phi_1 \to \phi_2$	$\to i$

HÁ MAIS DOIS CASOS, MAS A PROVA É SEMELHANTE

4) ϕ É DA FORMA $\phi_1 \wedge \phi_2$

5) ϕ_1 É DA FORMA $\phi_1 \vee \phi_2$ $\blacksquare$

PROP: SEJA ϕ UMA FÓRMULA COM ÁTOMOS PROPOSICIONAIS $p_1, \dots, p_n$. FIXE UMA LINHA ℓ DA TABELA VERDADE.

PARA CADA $i = 1, \dots, n$, SEJA

$$\hat{p}_i = \begin{cases} p_i & \text{se } p_i \text{ vale T na linha } \ell \\ \neg p_i & \text{se } p_i \text{ vale F na linha } \ell \end{cases}$$

TEMOS

1) $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n \vdash \phi$ SE ϕ VALE T NA LINHA ℓ
2) $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n \vdash \neg\phi$ SE ϕ VALE F NA LINHA ℓ

VOLTANDO: APLICAMOS A PROPOSIÇÃO À FÓRMULA $\overbrace{(\phi_1 \to (\phi_2 \to \dots \to \psi)))}^{\eta}$

TAUTOLOGIA

OBTEMOS 2^n PROVAS DA FORMA

$$\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n \vdash \eta$$

VAMOS JUNTAR ESSAS PROVAS E CRIAR UMA PROVA PARA η

Voltando: aplicamos a proposição à fórmula $\underline{(\phi_1 \to (\phi_2 \to \dots \to \psi)))}$

tautologia

obtemos 2^n provas da forma

$$\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n \vdash \eta$$

Vamos juntar essas provas e criar uma prova para η

Ex: $(p \wedge q) \to r$ pela proposição, temos

$p, q \vdash (p \wedge q) \to r$

$\neg p, q \vdash (p \wedge q) \to r$

$p, \neg q \vdash (p \wedge q) \to r$

$\neg p, \neg q \vdash (p \wedge q) \to r$

Usamos a LTE: $r \vee \neg r$ para qualquer r.

1 $p \vee \neg p$ LTE

2 p suposição | $\neg p$ suposição

3 $q \vee \neg q$ LTE | $q \vee \neg q$ LTE

q sup ⋮ $(p \wedge q) \to r$ a | $\neg q$ sup $(p \wedge q) \to r$ b | q sup $(p \wedge q) \to r$ c | $\neg q$ sup $(p \wedge q) \to r$ d

$(p \wedge q) \to r$ $\vee E$ | $(p \wedge q) \to r$ $\vee E$

$(p \wedge q) \to r$ $\vee E$

<u>Corolário</u>: Sejam $\phi_1, \ldots, \phi_n$ e ψ fórmulas da lógica proposicional.

Então $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi$ se e somente se $\phi_1, \ldots, \phi_n \models \psi$

FORMAS NORMAIS

→ ATÉ AGORA VIMOS A EQUIVALÊNCIA ENTRE DEDUÇÃO NATURAL E A SEMÂNTICA DA TABELA VERDADE.

CORRETUDE: TUDO QUE PODEMOS PROVAR (POR DEDUÇÃO NATURAL) É VERDADE BASEADO NA TABELA VERDADE

PODEMOS USAR ISSO PARA MOSTRAR QUE UM DETERMINADO SEQUENTE NÃO PODE SER PROVADO

COMPLETUDE: NÃO IMPORTA O QUE FOR FATO, É POSSÍVEL PROVÁ-LO POR DEDUÇÃO NATURAL.

EQUIVALÊNCIA SEMÂNTICA

$\phi \dashv\vdash \psi$

- DUAS FÓRMULAS SÃO EQUIVALENTES SE POSSUEM O MESMO SIGNIFICADO

EX: $p \to q$ E $\neg p \vee q$ POSSUEM A MESMA TABELA VERDADE

- COINCIDÊNCIA DA TABELA VERDADE NÃO É SUFICIENTE PARA DEFINIR EQUIVALÊNCIA

EX: $(p \wedge q) \to p$ E $\neg r \vee r$ POSSUEM FÓRMULAS ATÔMICAS DIFERENTES MAS SÃO SEMPRE VERDADE.

DEF: SEJAM ϕ E ψ FÓRMULAS DA LÓGICA PROPOSICIONAL.
DIZEMOS QUE ϕ E ψ SÃO SEMANTICAMENTE EQUIVALENTES SE $\phi \models \psi$ E $\psi \models \phi$. ESCREVEMOS $\phi \equiv \psi$.

DEF: SEJAM ϕ E ψ FÓRMULAS DA LÓGICA PROPOSICIONAL.

DIZEMOS QUE ϕ E ψ SÃO SEMANTICAMENTE EQUIVALENTES SE $\phi \models \psi$ E $\psi \models \phi$. ESCREVEMOS $\phi \equiv \psi$.

SE $\models \phi$, ENTÃO DIZEMOS QUE ϕ É VÁLIDA

EX:

$$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$$

$$p \to q \equiv \neg p \vee q$$

$$(p \vee q) \to p \equiv \neg r \vee r$$

$$p \wedge q \to r \equiv p \to (q \to r)$$

SE E SOMENTE SE

LEMA: SEJAM $\phi_1, \ldots, \phi_n$ E ψ FÓRMULAS DA LÓGICA PROPOSICIONAL.

$\phi_1, \ldots, \phi_n \models \psi$ É VÁLIDA SSE $\models \phi_1 \to (\phi_2 \to \cdots (\phi_n \to \psi))$ É VÁLIDA.

FORMAS NORMAIS CONJUNTIVA ($\wedge$) E DISJUNTIVA ($\vee$)

OBJETIVO 0: DESENVOLVER MÉTODOS PARA DECIDIR A VALIDADE DE

$$\phi_1, \ldots, \phi_n \models \psi$$

<u>LEMA</u>: SEJAM $\phi_1, \ldots, \phi_n$ E ψ FÓRMULAS DA LÓGICA PROPOSICIONAL.

$\phi_1, \ldots, \phi_n \models \psi$ É VÁLIDA SSE $\models \phi_1 \to (\phi_2 \to \cdots (\phi_n \to \psi))$ É VÁLIDA.

OU SEJA, BASTA DECIDIR SE $\phi_1 \to (\phi_2 \to \cdots (\phi_n \to \psi))$ É UMA TAUTOLOGIA.

FORMAS NORMAIS CONJUNTIVA ($\wedge$) (CNF)

OBJETIVO: TRANSFORMAR UMA DADA FÓRMULA ϕ EM UMA UMA FÓRMULA EQUIVALENTE QUE NÃO POSSUA $\rightarrow$.

DEF: UM LITERAL L É UM ÁTOMO p OU A NEGAÇÃO DE UM ÁTOMO $\neg p$.

UMA CLÁUSULA É DISJUNÇÃO ($\vee$) DE LITERAIS: $(p \vee q \vee \neg r)$

UMA FÓRMULA F ESTÁ NA FORMA NORMAL CONJUNTIVA SE F É A CONJUNÇÃO ($\wedge$) E CLÁUSULAS

EX: (i) $(\neg q \vee p \vee r) \wedge (\neg p \vee r) \wedge q$

(ii) $(p \vee r) \wedge (\neg p \wedge r) \wedge (p \vee \neg r)$

FORMALISMO BACKUS NAUR

literal	$L = p \mid \neg p$
cláusula	$C = L \mid L \vee C$
Fórmula na CNF	$F = C \mid C \wedge F$

Por que gostamos da CNF?

→ Fácil checar a validade ($\models \phi$)

fórmulas atômicas

p ou $\neg p$

Ex: $\models (\neg q \vee p \vee r) \wedge (\neg p \wedge r) \wedge q$ sse

$\models (\neg q \vee p \vee r)$ $\models (\neg p \wedge r)$ $\models q$

Lema: Uma disjunção de literais $L_1 \vee \dots \vee L_m$ é válida sse existem $1 \leq i, j \leq m$ t.q. $L_i = \neg L_j$.

Prova: se $L_i = \neg L_j$, então $L_i \vee L_j$ é sempre avaliada em T. Logo $L_1 \vee \dots \vee L_m$ é sempre avaliado em T.

Ex: $(p \vee \neg p \vee q)$

Ex: $\left(\underset{F}{p} \vee \underset{F}{q} \vee \underset{F}{(\neg \overset{T}{r})}\right)^{F}$

Por outro lado, se nenhum literal aparece junto com a sua negação, para $1 \leq i \leq m$ atribuímos F se L_i é átomo e T se L_i é uma negação de um átomo.

<u>DEF</u>: Dada uma fórmula ϕ da lógica proposicional, dizemos que que ϕ é satisfatível / satisfazível se é possível avaliar ϕ em T.

- Buscamos uma atribuição de seus átomos

- Satisfatibilidade é um conceito mais fraco do que validade.*
  ↳ Queremos uma atribuição que satisfaça ϕ

* Queremos que toda atribuição satisfaça ϕ.