FORMAS NORMAIS CONJUNTIVA ($\wedge$) E DISJUNTIVA ($\vee$)

OBJETIVO 0: DESENVOLVER MÉTODOS PARA DECIDIR A VALIDADE DE

$$\phi_1, \dots, \phi_n \models \psi$$

<u>LEMA</u>: SEJAM $\phi_1, \dots, \phi_n$ E ψ FÓRMULAS DA LÓGICA PROPOSICIONAL.

$\phi_1, \dots, \phi_n \models \psi$ É VÁLIDA SSE $\models \phi_1 \to (\phi_2 \to \dots (\phi_n \to \psi))$ É VÁLIDA.

OU SEJA, BASTA DECIDIR SE $\phi_1 \to (\phi_2 \to \dots (\phi_n \to \psi))$ É UMA TAUTOLOGIA.

FORMAS NORMAIS CONJUNTIVA ($\wedge$) (CNF)

OBJETIVO: TRANSFORMAR UMA DADA FÓRMULA ϕ EM UMA UMA FÓRMULA EQUIVALENTE QUE NÃO POSSUA $\rightarrow$.

DEF: UM LITERAL L É UM ÁTOMO p OU A NEGAÇÃO DE UM ÁTOMO $\neg p$.

UMA CLÁUSULA É DISJUNÇÃO ($\vee$) DE LITERAIS: $(p \vee q \vee \neg r)$

UMA FÓRMULA F ESTÁ NA FORMA NORMAL CONJUNTIVA SE F É A CONJUNÇÃO ($\wedge$) E CLÁUSULAS

EX: (i) $(\neg q \vee p \vee r) \wedge (\neg p \vee r) \wedge q$

(ii) $(p \vee r) \wedge (\neg p \wedge r) \wedge (p \vee \neg r)$

FORMALISMO BACKUS NAUR

literal	$L = p \mid \neg p$
cláusula	$C = L \mid L \vee C$
Fórmula na CNF	$F = C \mid C \wedge F$

Por que gostamos da CNF?

→ Fácil checar a validade ($\models \phi$)

Fórmulas atômicas

p ou $\neg p$

Ex: $\models (\neg q \lor p \lor r) \land (\neg p \land r) \land q$ sse

$\models (\neg q \lor p \lor r)$ $\quad \models (\neg p \land r)$ $\quad \models q$

Lema: Uma disjunção de literais $L_1 \lor \dots \lor L_m$ é válida sse existem $1 \leq i, j \leq m$ t.q. $L_i = \neg L_j$.

Prova: se $L_i = \neg L_j$, então $L_i \lor L_j$ é sempre avaliada em T.

Logo $L_1 \lor \dots \lor L_m$ é sempre avaliado em T.

Ex: $(p \lor \neg p \lor q)$

Ex: $\left(\underset{F}{p} \lor \underset{F}{q} \lor \underset{F}{(\neg \overset{T}{r})}\right)^{F}$

Por outro lado, se nenhum literal aparece junto com a sua negação, para $1 \leq i \leq m$ atribuímos F se L_i é átomo e T se L_i é uma negação de um átomo.

DEF: Dada uma fórmula ϕ da lógica proposicional, dizemos que que ϕ é satisfatível / satisfazível se é possível avaliar ϕ em T.

- Buscamos uma atribuição de seus átomos

- Satisfatibilidade é um conceito mais fraco do que validade.
  - ↳ Queremos uma atribuição que satisfaça ϕ

* Queremos que toda atribuição satisfaça ϕ.

DEF: Dada uma fórmula ϕ da lógica proposicional, dizemos que que ϕ é satisfatível / satisfazível se é possível avaliar ϕ em T.

Proposição: Seja ϕ uma fórmula da lógica proposicional. Então ϕ é satisfatível sse $\neg\phi$ não é válida.

Prova: Se ϕ é satisfatível, então existe uma atribuição dos seus átomos que avalia ϕ em T, e portanto avalia $\neg\phi$ em F. Logo $\neg\phi$ não é válida.

Por outro lado, se $\neg\phi$ não é válida, então existe avaliação dos seus átomos que avalia $\neg\phi$ em F, e portanto, avalia ϕ em T. $\blacksquare$

SE QUEREMOS DECIDIR SE ϕ É SATISFATÍVEL, PODEMOS PERGUNTAR SE $\neg\phi$ É UMA TAUTOLOGIA.

↳ É FÁCIL SE EU CONHEÇO UMA FÓRMULA EM CNF EQUIVALENTE A $\neg\phi$.

MÉTODO PARA OBTER UMA CNF EQUIVALENTE USANDO A TABELA VERDADE

EX:

$$\underbrace{(p \to \neg q) \to (q \vee \neg p)}_{\phi}$$

p	q	ϕ
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

$$(\neg p \vee q)$$

Ex:

	p	q	r	ϕ
	T	T	T	T
2	T	T	F	F
3	T	F	T	T
	T	F	F	T
5	F	T	T	F
6	F	T	F	F
7	F	F	T	F
	F	F	F	T

$p \vee q \vee \neg r$

$(\neg p \vee \neg q \vee r)$ C_1

$\neg p$: T, F; $\neg q$: T, F; r: F, F

$= \neg p$

$(p \vee \neg q \vee \neg r)$ C_2 $= (p \vee \neg q)$

$(p \vee \neg q \vee r)$ C_3

$(p \vee q \vee \neg r)$ C_4

$$C_1 \wedge C_2 \wedge C_3 \wedge C_4$$

$$(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r)$$

EXISTE UM OUTRO MÉTODO. UM ALGORITMO CNF T.Q.

1) RECEBE UMA FÓRMULA ϕ COMO ENTRADA
2) DEVOLVE UMA FÓRMULA ψ EQUIVALENTE A ϕ
3) ψ ESTÁ EM CNF.

IDEIAS:

1) SE ϕ É DA FORMA $\phi_1 \wedge \phi_2$, ENTÃO DEVOLVEMOS $CNF(\phi_1) \wedge CNF(\phi_2)$

2) ELIMINAÇÃO DO $\rightarrow$:

$\eta_1 \rightarrow \eta_2$ PODE SER SUBSTITUÍDO POR $\neg \eta_1 \vee \eta_2$

PORQUE $\eta_1 \rightarrow \eta_2 \equiv \neg \eta_1 \vee \eta_2$

IDEIAS : $\neg(q \wedge \neg p)$

1) SE ϕ É DA FORMA $\phi_1 \wedge \phi_2$, ENTÃO DEVOLVEMOS $CNF(\phi_1) \wedge CNF(\phi_2)$

2) ELIMINAÇÃO DO $\to$:

$\eta_1 \to \eta_2$ PODE SER SUBSTITUÍDO POR $\neg \eta_1 \vee \eta_2$

PORQUE $\eta_1 \to \eta_2 \equiv \neg \eta_1 \vee \eta_2$

OBS: AQUI PODEM APARECER DUPLA NEGAÇÃO $\neg\neg$

FORMA NORMAL NEGATIVA.

3) LEIS DE DE MORGAN : PARA TERMOS APENAS ÁTOMOS NEGADOS

$$\neg(\phi_1 \vee \cdots \vee \phi_n) \equiv \neg \phi_1 \wedge \neg \phi_2 \wedge \cdots \wedge \neg \phi_n$$

$$\neg(\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n) \equiv \neg \phi_1 \vee \cdots \vee \neg \phi_n$$

4) DISTRIBUTIVIDADE:

4.1 $\phi \wedge (\psi \vee \eta) \equiv (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \eta)$ DISTR

4.2 $\phi \vee (\psi \wedge \eta) \equiv (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \eta)$

$(\psi \vee \eta) \vee \phi \equiv (\psi \vee \phi) \wedge (\eta \vee \phi)$

Ex: $\underbrace{(p \wedge q)}_{\phi} \vee (r \wedge s) \equiv ((p \wedge q) \vee r) \wedge ((p \wedge q) \vee s)$

$\equiv ((p \vee r) \wedge (q \vee r)) \wedge ((p \vee s) \wedge (q \vee s))$

$\equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee s)$

CNF (ϕ)

1. $\phi_1 \leftarrow$ REMOVER_IMPLICAÇÃO (ϕ) $(\eta_1 \rightarrow \eta_2 \equiv \neg \eta_1 \vee \eta_2)$

2. $\phi_2 \leftarrow$ NNF (ϕ_2) LEIS DE DE MORGAN, FORMA NORMAL NEGATIVA

DISTRIBUIÇÃO DE $\neg$

3. SE ϕ_2 É ÁTOMO :
4. DEVOLVE ϕ_2
5. SE ϕ_2 É $\psi \wedge \eta$:
6. DEVOLVE $CNF(\psi) \wedge CNF(\eta)$
7. SE ϕ_2 É $\psi \vee \eta$:

DEVOLVE $\underline{DISTR(CNF(\psi), CNF(\eta))}$

4.1 $\phi \wedge (\psi \vee \eta) \equiv (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \eta)$

4.2 $\phi \vee (\psi \wedge \eta) \equiv (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \eta)$

$(\psi \vee \eta) \vee \phi \equiv (\psi \vee \phi) \wedge (\eta \vee \phi)$

DISTR (η_1, η_2) :

1. SE η_1 É $\eta_{11} \wedge \eta_{12}$

DEVOLVE

DISTR $(\eta_{11}, \eta_2) \wedge$ DISTR (

4.1 $\phi \wedge (\psi \vee \eta) \equiv (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \eta)$

4.2 $\phi \vee (\psi \wedge \eta) \equiv (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \eta)$

$(\psi \vee \eta) \vee \phi \equiv (\psi \vee \phi) \wedge (\eta \vee \phi)$

DISTR (η_1, η_2):

1. SE η_1 É $\eta_{11} \wedge \eta_{12}$

   DEVOLVE DISTR $(\eta_{11}, \eta_2) \wedge$ DISTR (η_{12}, η_2)

2. SE η_2 É $\eta_{21} \wedge \eta_{22}$

   DEVOLVE DISTR $(\eta_1, \eta_{21}) \wedge$ DISTR (η_1, η_{22})

3. CASO CONTRÁRIO, QUANDO η_1 E η_2 SÃO LITERAIS.

   DEVOLVE $\eta_1 \vee \eta_2$

Fórmulas de Horn

- CNF é fácil de testar validade, mas não é fácil de testar satisfatibilidade

<u>Def</u>: Uma fórmula de Horn é uma fórmula que pode ser gerada pelas seguintes regras

$$P : \bot \mid \top \mid p \quad \text{átomo prop.}$$

$$A : P \mid P \wedge A$$

$$C : A \to P \quad \text{cláusula de Horn}$$

$$H : C \mid C \wedge H$$

Ex: $(\underbrace{p \wedge q}_{\bot} \to r) \wedge (\underbrace{q}_{\top} \to p) \wedge (r \wedge s \to q)$

EX: $(p \wedge q \wedge s \rightarrow p) \wedge (q \wedge r \rightarrow p) \wedge (p \wedge s \rightarrow s)$

$(p \wedge q \wedge s \rightarrow \top) \wedge (q \wedge r \rightarrow p) \wedge (\top \rightarrow s)$

SÃO FÓRMULAS DE HORN

EX: $(p \wedge q \wedge s \rightarrow \neg p) \wedge (q \wedge r \rightarrow p) \wedge (p \wedge s \rightarrow s)$

$(p \wedge q \wedge s \rightarrow p) \wedge (\neg q \wedge r \rightarrow p) \wedge (p \wedge s \rightarrow s)$

$(p \wedge q \wedge s \rightarrow r \wedge s)$

$(p \wedge q \wedge s \rightarrow r \wedge s) \wedge (p \vee q \vee r)$

NÃO SÃO FÓRMULAS DE HORN.

COMO $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

ENTÃO

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n \rightarrow q) \equiv (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \cdots \vee \neg p_n \vee q)$$

CLÁUSULAS DE HORN TAMBÉM SE PARECEM COM AS CLÁUSULAS DA CNF PORÉM POSSUEM EXATAMENTE UM ÁTOMO NEGADO

EX

$$(p \wedge q \wedge s \rightarrow p) \wedge (q \wedge r \rightarrow p) \wedge (p \wedge s \rightarrow s)$$

$$(\neg p \vee \neg q \vee \neg s \vee p) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg s \vee s)$$

- FÁCEIS DE CHECAR SATISFATIBILIDADE

PROPAGAÇÃO DA UNIDADE.

$F(x, y)$ $\qquad \dfrac{y + x}{}$ $\qquad y \cdot x$

$+(y, x) \qquad \cdot(y, x)$

$\wedge(p, q) \qquad \rightarrow(p, q)$

$\neg(\phi)$

$\phi_1, \phi_2 \models \psi$ $\qquad \vdash \qquad \models$

CONCLUSÃO

p	q	r	ϕ_1	ϕ_2	ψ
			1	1	1
			1	0	?
			1	1	1
			1	1	0

CONTRA EXEMPLO