Fórmulas

→ As escolhas de $\mathcal{P}$ e $\mathcal{F}$ dependem do que queremos descrever

DEF: O conjunto de fórmulas sobre $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ é definido indutivamente sobre os termos como segue

→ Se $P \in \mathcal{P}$ é um predicado n-ário e $t_1, \ldots, t_n$ são termos, então $P(t_1, \ldots, t_n)$ é uma fórmula

→ Se ϕ é uma fórmula, então $(\neg \phi)$ é fórmula

→ Se ϕ e ψ são fórmulas, então $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, e $(\phi \rightarrow \psi)$ são fórmulas

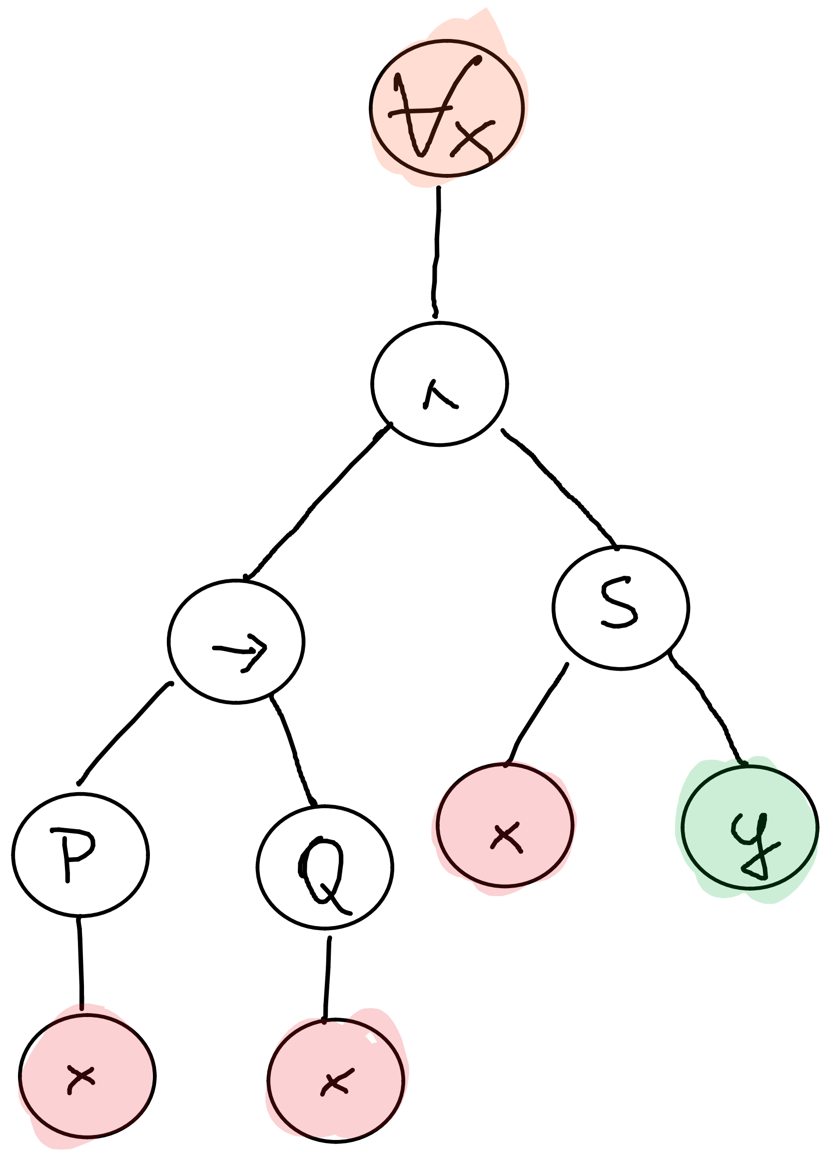
→ Se ϕ é fórmula e x é uma variável, então

$$\forall x \, \phi \quad \text{e} \quad \exists x \, \phi \quad \text{são fórmulas.}$$

→ Nada mais é fórmula.

BACKUS NAUR

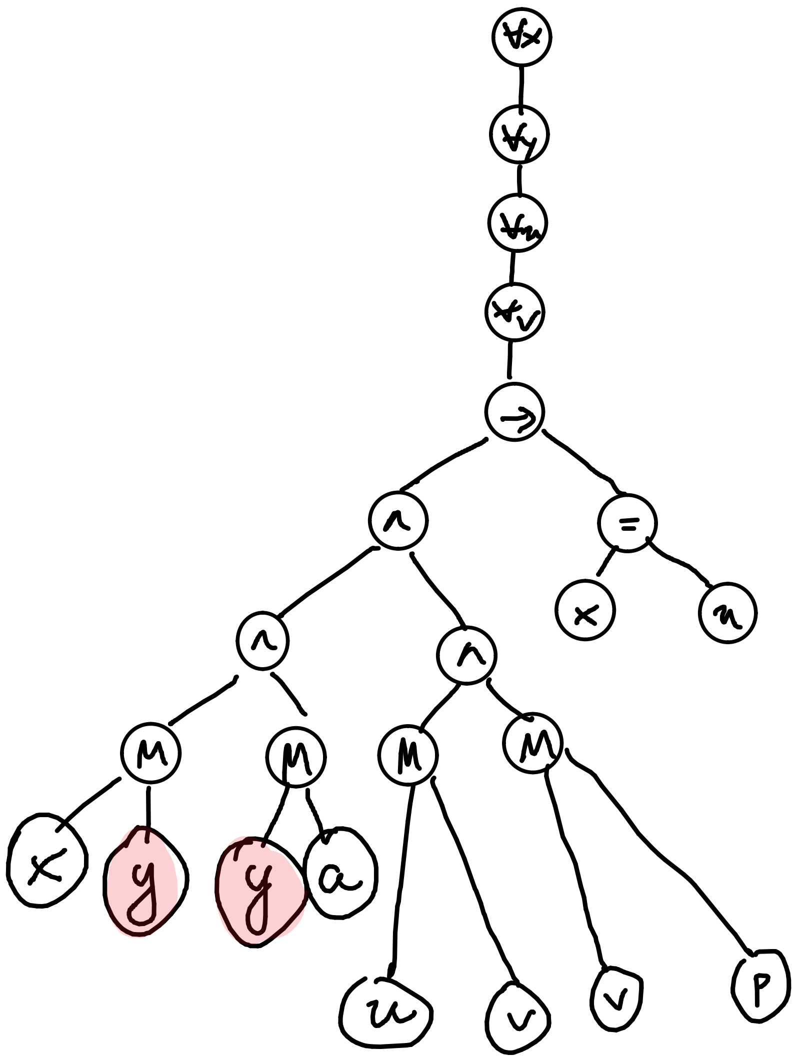
$$\phi ::= P(t_1, \dots, t_n) \mid (\neg \phi) \mid (\phi \wedge \psi) \mid (\phi \vee \psi) \mid (\phi \to \psi) \mid$$
$$\forall x \phi \mid \exists x \phi$$



ÁRVORES DE PARSE

EX: $\forall x((P(x) \to Q(x)) \wedge S(x,y))$

$$\Big(\forall x\big(\forall y\big(\forall u\big(\forall v\ \big(\big((M(x,y) \wedge M(y,a)) \wedge (M(u,v) \wedge M(v,p))\big) \rightarrow (x = u)\big)\big)\big)\big)\Big)$$



Variáveis Livres e Limitadas

- É importante definirmos o domínio de uma variável
- Árvores de Parse
  - Nós adicionais $\forall x$ e $\exists x$ possuem apenas uma subárvore
  - Predicados $P(t_1, \ldots, t_n)$, nó P com n subárvores
    - Subárvores de parse dos termos $t_1, \ldots, t_n$
- As variáveis aparecem de duas formas
  - Variáveis aparecem como folhas

→ AS VARIÁVEIS APARECEM DE DUAS FORMAS

- VARIÁVEIS APARECEM COMO FOLHAS

1. SE SUBIRMOS A ÁRVORE DE PARSE A PARTIR DE UM NÓ X, E CHEGARMOS EM UM NÓ ∀X, ISSO SIGNIFICA QUE QUE ESSA OCORRÊNCIA DE X É LIMITADA POR ∀X, ENTÃO X REPRESENTA QUALQUER VALOR POSSÍVEL.

2. AO SUBIRMOS UMA ÁRVORE A PARTIR DE Y E NÃO ESBARRAR EM NENHUM NÓ QUE QUANTIFIQUE Y E Y É LIVRE

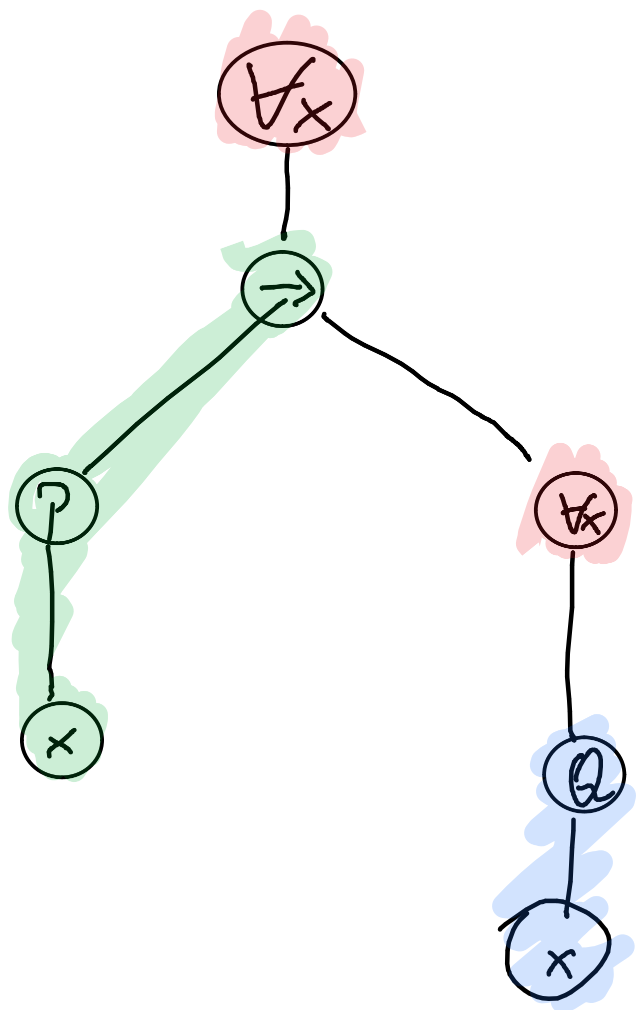
DEF: SEJA ϕ UMA FÓRMULA. UMA OCORRÊNCIA DE VARIÁVEL x É LIVRE EM ϕ SE ESTÁ EM UM NÓ FOLHA E NÃO ESTÁ EM UMA SUBÁRVORE DE UM NÓ $\forall x$ OU $\exists x$, OU SEJA, SE NÃO EXISTE CAMINHO ACIMA DESTE NÓ ATÉ UM NÓ $\forall x$ OU $\exists x$.
DO CONTRÁRIO ESTA OCORRÊNCIA DE x É LIMITADA.

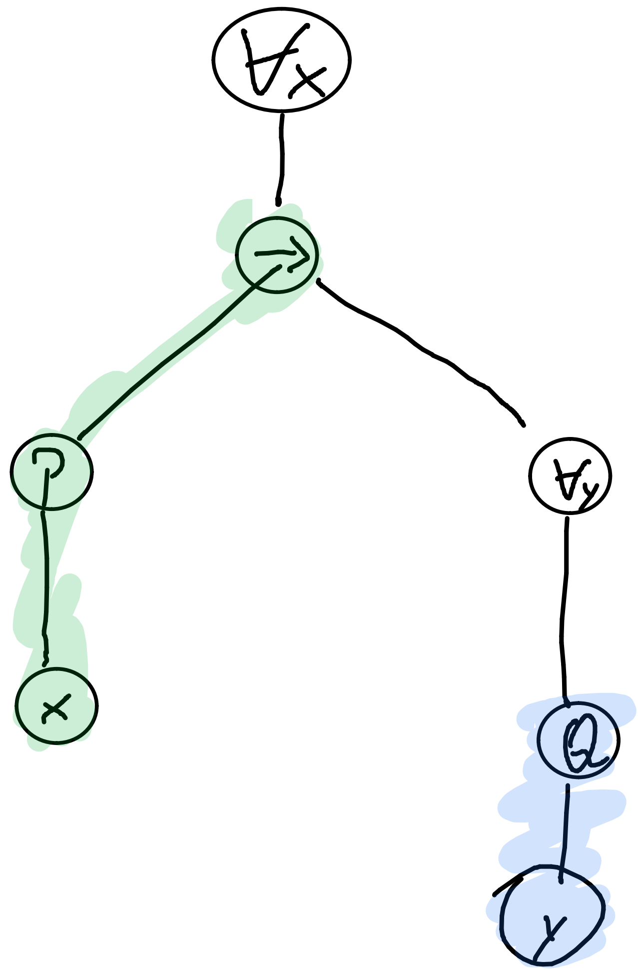
PARA $\forall x \psi$ E $\exists x \psi$, DIZEMOS QUE ψ É O ESCOPO DE x

$\rightsquigarrow$ SE x OCORRE EM ϕ ENTÃO x É LIMITADA SE E SÓ SE x OCORRE NO ESCOPO DE UM $\forall x$ OU $\exists x$

OBS: É POSSÍVEL REINTRODUZIR A VARIÁVEL x.
NESTE CASO O ESCOPO DE x IGNORA A SUBÁRVORE DE REINTRODUÇÃO

$$\forall x\,(P(x) \to (\forall x\, Q(x))) \equiv \forall x\,(P(x) \to (\forall y\, Q(y)))$$



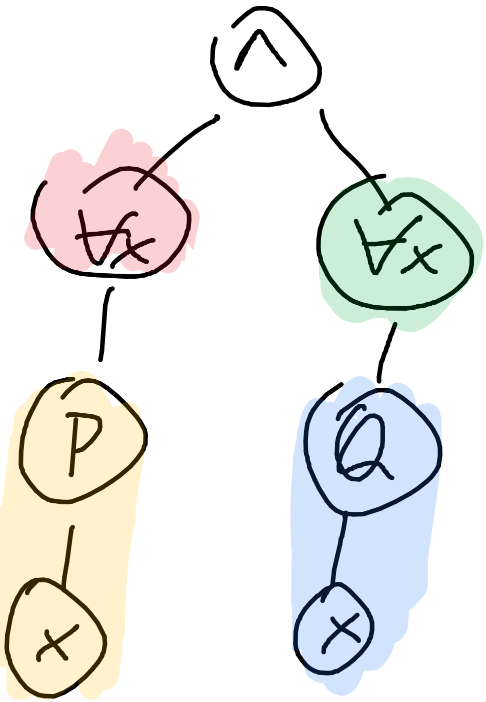


Ex: $\forall x \, (P(x) \rightarrow \exists x \, Q(x))$

O ESCOPO DE $\forall x$ É $P(x)$

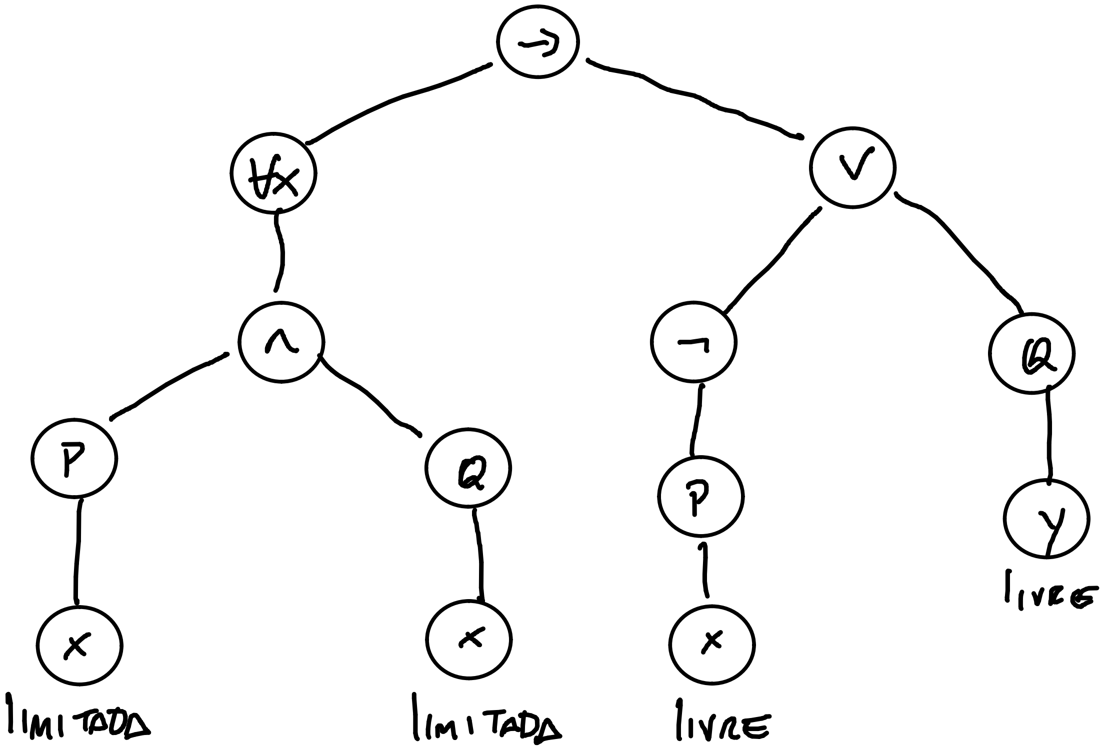
O ESCOPO DE $\exists x$ É $Q(x)$

Ex: $(\forall x \, P(x)) \land (\forall x \, Q(x))$ $\qquad$ $(\forall x \, P(x)) \land (\forall y \, Q(y))$



OBS: Uma variável pode ser limitada e livre em uma fórmula

$$(\forall x\, (P(x) \wedge Q(x))) \rightarrow (\neg P(x) \vee Q(y)))$$



→ Mas cada ocorrência de x ou é limitada ou livre, nunca ambos

SUBSTITUIÇÕES

→ VARIÁVEIS GUARDAM LUGAR

DEVEMOS SUBSTITUÍ-LAS POR INFORMAÇÕES CONCRETAS.

→ SINTATICAMENTE SÓ PODEMOS SUBSTITUIR VARIÁVEIS POR TERMOS

DEF: DADOS UMA VARIÁVEL x, UM TERMO t, E UMA FÓRMULA ϕ.

DEFINIMOS $\phi[t/x]$ PARA DENOTAR A FÓRMULA OBTIDA

DE ϕ AO SUBSTITUIRMOS TODA OCORRÊNCIA LIVRE DE x POR t.

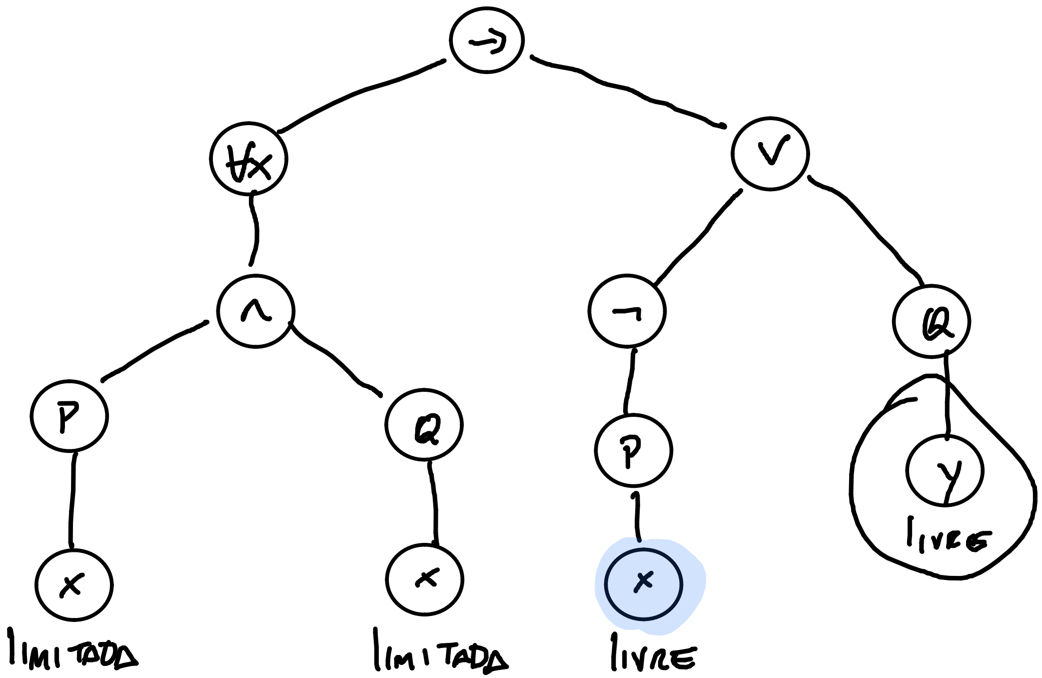
EX: ϕ É A FÓRMULA $\forall x((P(x) \to Q(x)) \wedge S(x,y))$

ENTÃO $\phi[t/x]$ É ϕ POIS NENHUMA OCORRÊNCIA DE x EM ϕ

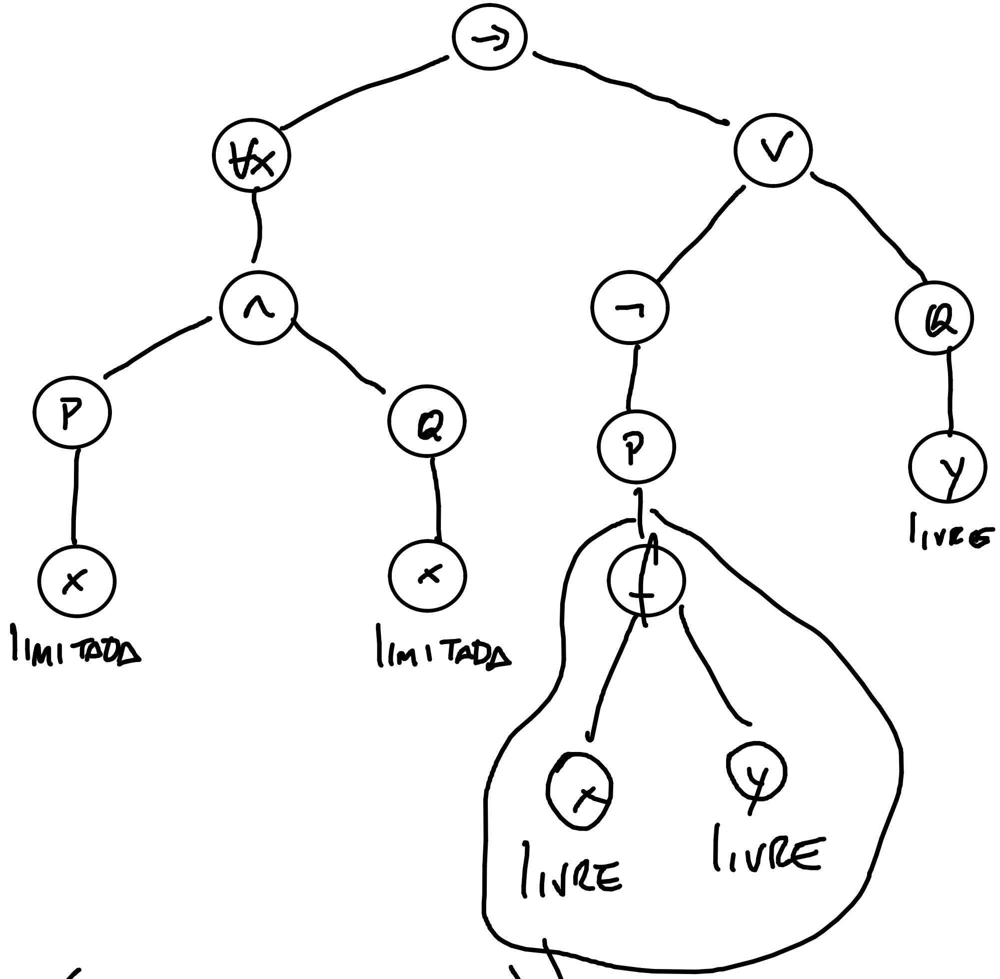
É LIVRE. POR OUTRO LADO $\phi[t/y]$ É $\forall x((P(x) \to Q(x)) \wedge S(x,t))$

Ex: $\phi[f(x,y)/x]$ $\quad \phi$ é $(\forall x\, (P(x) \wedge Q(x))) \to (\neg P(x) \vee Q(y))$

ϕ



$\phi[f(x,y)/x]$



$\phi[f(x,y)/x]$ $\quad (\forall x\, (P(x) \wedge Q(x))) \to (\neg P(f(x,y)) \vee Q(y))$

$$P(x) = x^3 + 2x + 7$$

$$P(3) = 3^3 + 2 \cdot 3 + 7$$

$$Q(x,y) = xy + x^2 + y^3 + (x \cdot y)^2$$

$$Q(3,y) = 3y + 3^2 + y^3 + (3y)^2$$

$$\forall x \left(H(x) \to \left(P(x) \to \exists x\, F(x) \right) \right)$$

P É PAI

PARA TODO X, SE X É PAI, EXISTE Y QUE É FILHO