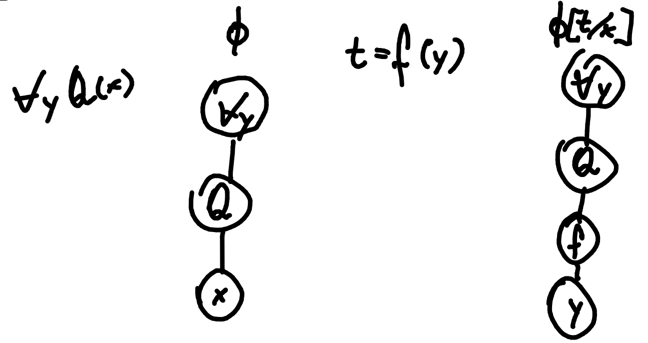
pela def de termo

Efeito colateral: ao fazer $\phi[t/x]$, o termo t "pode" conter a variável y enquanto uma ocorrência livre de x está no escopo de um $\forall y$ ou $\exists y$

→ Vamos evitar isso.

<u>Def</u>: Dado um termo t, uma variável x, e uma fórmula ϕ, dizemos que **t é livre para x em ϕ** se nenhuma ocorrência livre de x (em ϕ) ocorre no escopo de um $\forall y$ ou $\exists y$ para toda variável y de t.

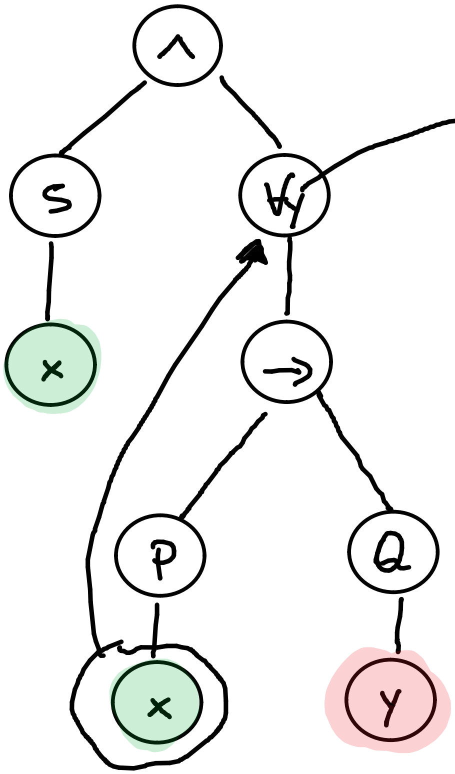


DEF: Dado um termo t, uma variável x, e uma fórmula ϕ, dizemos que t é livre para x em ϕ se nenhuma ocorrência livre de x (em ϕ) ocorre no escopo de um $\forall y$ ou $\exists y$ para toda variável y de t.

→ Isso quer dizer as variáveis de t não vão virar limitadas ao fazermos a substituição

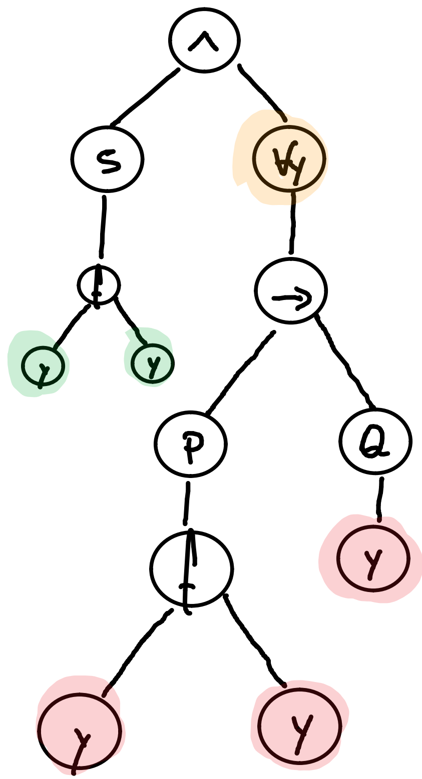
Ex:

ϕ



$\phi[f(y,y)/x]$

→ $f(y,y)$ não é livre para x em ϕ



TEORIA DA PROVA PARA LÓGICA DE PREDICADOS

- NOVAS REGRAS DE PROVA PARA LIDAR COM QUANTIFICADORES E COM A IGUALDADE.

- TODAS AS REGRAS DE PROVA DA LÓGICA PROPOSICIONAL CONTINUAM VÁLIDAS.

$=(x,y)$

INFIXA

$x=y$

REGRAS DA IGUALDADE

- TODO TERMO É IGUAL A SI MESMO

$$\frac{}{t = t} = i$$

t DEVE SER UM TERMO, NÃO PODE SER FÓRMULA

$$\frac{t_1 = t_2 \qquad \phi[t_1/x]}{\phi[t_2/x]} = E$$

- t_1 E t_2 DEVEM SER LIVRES PARA x EM ϕ

Regras da Igualdade

→ Todo termo é igual a si mesmo

$$\frac{}{t = t} \; {=}i$$

t deve ser um termo,
não pode ser fórmula

$$\frac{t_1 = t_2 \qquad \phi[t_1/x]}{\phi[t_2/x]} \; {=}E$$

→ t_1 e t_2 devem ser livres para x em ϕ

Ex:

1	$(x+1) = (1+x)$	Premissa	→ $t_1 = t_2$
2	$((x+1)>1) \to ((x+1)>0)$	Premissa	$\phi[\overset{t_1}{(x+1)}/x]$
3	$((1+x)>1) \to ((1+x)>0)$	$=E$ 1, 2	$\phi[t_1/x]$

Nesta prova usamos t_1 como $(x+1)$, t_2 como $(1+x)$
e ϕ como $(x>1) \to (x>0)$

EX: $t_1 = t_2 \vdash t_2 = t_1$ SIMETRIA

$$\frac{t_1 = t_2 \quad \phi[t_1/x]}{\phi[t_2/x]} =E$$

1	$t_1 = t_2$	PREMISSA	
2	$t_1 = t_1$	$=i$	$\phi[t_1/x]$
3	$t_2 = t_1$	$=E$ 1, 2	$\phi[t_2/x]$

USAMOS ϕ COMO $x = t_1$ NA LINHA 2

EX: $t_1 = t_2, t_2 = t_3 \vdash t_1 = t_3$ TRANSITIVIDADE

1.	$t_1 = t_2$	PREMISSA	$\phi[t_2/x]$
2.	$t_2 = t_3$	PREMISSA	
3.	$t_1 = t_3$	$=E$ 2, 1	$\phi[t_3/x]$

USAMOS ϕ COMO $t_1 = x$ NA LINHA 1

REGRAS DA QUANTIFICAÇÃO UNIVERSAL

$$\frac{\forall_x \phi}{\phi[t/x]} \ \forall_x E$$

→ DIZ QUE SE $\forall_x \phi$ É VERDADE, ENTÃO PODEMOS SUBSTITUIR x POR QUALQUER TERMO t

→ t DEVE SER LIVRE PARA x EM ϕ

EX: UNIVERSO DO DISCURSO SÃO PESSOAS

F É O PREDICADO UNÁRIO T.Q. $F(x)$ SIGNIFICA "x É FILHO DE ALGUÉM"

m É A FUNÇÃO UNÁRIA T.Q. $m(x)$ É A MÃE DE x.

a É ANTÔNIO

$$\forall_x F(x) \qquad F(a) \qquad F(m(a)) \qquad F(m(m(a)))$$

M É O PREDICADO BINÁRIO T.Q. $M(x,y)$ SIGNIFICA "x É FILHO DE y"

$$\forall_x \exists_y M(x,y) \qquad \exists_y M(a,y) \qquad \exists_y M(\overbrace{m(y)}^{t},y)$$

PROIBIDO!

POR QUE t DEVE SER LIVRE PARA x EM ϕ?

EX: SE ϕ É A FÓRMULA $\exists y\,(x<y)$ E t É y

A FÓRMULA $\forall x\,\phi$

"PARA TODO x EXISTE y T.Q. $x<y$"

ENTRETANTO, $\phi[y/x]$ É A FÓRMULA $\exists y\,(y<y)$

DIZ QUE

"EXISTE y T.Q. $y<y$"

O QUE NÃO É VERDADE

"EXISTE UM NÚMERO QUE É MAIOR QUE SI MESMO"

MAS SE t' É z, ENTÃO $\phi[z/x]$ É $\exists y(z<y)$

t' É 3, ENTÃO $\phi[3/x]$ É $\exists y(3<y)$