EXCLUSÃO DO QUANTIFICADOR UNIVERSAL:

$$\frac{\forall x\, \phi}{\phi[t/x]}\ \forall x E$$

→ A INTRODUÇÃO É MAIS DELICADA

→ PRECISAMOS DE UMA VARIÁVEL FICTÍCIA x_0

$$\frac{\boxed{\begin{array}{l} x_0 \\ \quad\vdots \\ \quad\phi[x_0/x] \end{array}}}{\forall x\, \phi}\ \forall x i$$

→ DIZ QUE SE COMEÇARMOS COM UMA VARIÁVEL "FRESCA" x_0 E CONSEGUIMOS PROVAR $\phi[x_0/x]$, ENTÃO VALE $\forall x\, \phi$

→ É IMPORTANTE QUE x_0 NÃO TENHA SIDO USADA FORA DA CAIXA. x_0 É UM TERMO ARBITRÁRIO, SEM SUPOSIÇÕES. QUALQUER COISA FUNCIONARIA EM SEU LUGAR

→ PARECE QUE VAMOS DE UM CASO PARTICULAR PARA O GERAL

Ex: $\forall x\,(P(x) \to Q(x)),\ \forall x\,P(x) \vdash \forall x\,Q(x)$

1.	$\forall x\,(P(x) \to Q(x))$	PREMISSA
2.	$\forall x\,P(x)$	PREMISSA
3.	x_0	SUPOSIÇÃO
4.	$P(x_0) \to Q(x_0)$	$\forall x$E 1
5.	$P(x_0)$	$\forall x$E 2
6.	$Q(x_0)$	$\to$E 4,5
7.	$\forall x\,Q(x)$	$\forall x$i 3-6

Ex: $P(t),\ \forall x\,(P(x) \to \neg Q(x)) \vdash \neg Q(t)$

1.	$P(t)$	Premissa
2.	$\forall x\,(P(x) \to \neg Q(x))$	Premissa
3.	$P(t) \to \neg Q(t)$	$\forall x e$ 2.
4.	$\neg Q(t)$	$\to e$ 3, 1

→ $\forall x$ é um esquema de regras, uma regra para cada termo t (livre para x em ϕ), e devemos escolher t apropriadamente

→ Naturalmente, também podemos usar $\forall y e$, $\forall y i$, $\forall z e$, $\forall z i$, ...

→ Podemos eventualmente usar $\forall e$, $\forall i$ (sem especificar a var.)

→ Note que apesar dos [ ] aparecerem nas regras, eles não aparecem nas aplicações

- PODE PENSAR NAS FÓRMULAS/REGRAS DE $\forall$ COMO UMA SEQUÊNCIA DE $\wedge$

$\forall x\, \phi \qquad \phi[1/x] \wedge \phi[2/x] \wedge \phi[3/x]$

$U = \{1, 2, 3\}$

$\forall x\, P(x) \qquad P(1) \wedge P(2) \wedge P(3)$

$$\frac{\phi_1 \qquad \phi_2}{\phi_1 \wedge \phi_2} \wedge i$$

- SÃO DE UMA CERTA FORMA GENERALIZAÇÕES
- ENQUANTO $\wedge$ TEM DOIS ITENS, $\forall$ TEM VÁRIOS.
  - ENQUANTO $\wedge i$ TEM DUAS PREMISSAS, $\forall x i$ TEM UMA PREMISSA $\phi[x_0/x]$ PARA CADA "VALOR" POSSÍVEL DE x_0
    - PARA PROVAR $\forall x\, \phi$, VOCÊ TEM QUE PROVAR $\phi[x_0/x]$ PARA TODO x_0
    - PARA PROVAR $\psi_1 \wedge \psi_2$, VOCÊ TEM QUE PROVAR ψ_i PARA $i = 1, 2$

→ ENQUANTO $\wedge E$ NOS PERMITE DEDUZIR DE $\psi_1 \wedge \psi_2$ TANTO ψ_1 QUANTO ψ_2, $\forall x E$ NOS PERMITE DEDUZIR DE $\forall x\, \phi$, A FÓRMULA $\phi[x_0/x]$ PARA QUALQUER VALOR DE x_0.

$$\frac{\phi_1 \wedge \phi_2}{\phi_i}\ \wedge E_i$$

REGRAS DA QUANTIFICAÇÃO EXISTENCIAL

→ ASSIM COMO $\forall$ ESTENDE $\wedge$, O $\exists$ ESTENDE $\vee$.

$$\frac{\phi_1}{\phi_1 \vee \phi_2}\ \vee i_1, \qquad \frac{\phi_1}{\phi_2 \vee \phi_1}\ \vee i_2 \qquad\qquad \frac{\phi[x_0/x]}{\exists x \phi}\ \exists x i$$

$\exists x P(x)$ $\qquad P(1) \vee P(2) \vee P(3)$

$$\frac{8 \text{ É A SOMA DE DOIS PRIMOS}}{(8 \text{ É A SOMA DE DOIS PRIMOS}) \vee (\text{FÁBIO SABE VOAR})}$$

ϕ

→ PODEMOS DEDUZIR $\exists x \phi$ SEMPRE QUE TEMOS $\phi[t/x]$ PARA ALGUM t (t DEVE SER LIVRE PARA x EM ϕ)

TEM UMA TESTEMUNHA

→ $\phi[t/x]$ NOS DÁ MAIS INFORMAÇÃO QUE $\exists x \phi$

EX: EXISTE NATURAL QUE É SOMA DE DOIS PRIMOS $\quad \exists x \phi$

8 É A SOMA DE DOIS PRIMOS $\quad \phi[8/x]$

ϕ "x É A SOMA DE DOIS PRIMOS"

$$\frac{\phi[8/x]}{\exists x \phi}$$

→ EXCLUSÃO

$$\frac{\phi \vee \psi \qquad \boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots\\ \chi\end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c}\psi\\ \vdots\\ \chi\end{array}}}{\chi}\ \vee E \qquad\qquad \frac{\exists x \phi \qquad \boxed{\begin{array}{cc}x_0 & \phi[x_0/x]\\ & \vdots\\ & \chi\end{array}}}{\chi}\ \exists x E$$

→ ASSIM COMO $\vee E$, $\exists x E$ ENVOLVE UMA ANÁLISE DE CASO.

→ SABEMOS QUE ϕ VALE PARA PELO MENOS UM VALOR DE x. ENTÃO PRECISAMOS FAZER ANÁLISE DE CASO SOBRE TODOS OS VALORES DE x.

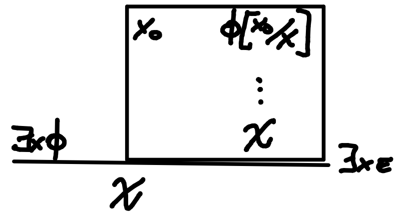
→ x_0 NÃO PODE OCORRER FORA DA CAIXA E NEM EM χ

→ DA MESMA FORMA QUE SE VOCÊ QUISER USAR $\phi_1 \vee \phi_2$ VOCÊ TEM QUE ESTAR PREPARADO PARA USAR TANTO O ϕ_1 QUANTO O ϕ_2, SE VOCÊ QUER USAR $\exists x \phi$, VOCÊ DEVE ESTAR PREPARADO PARA USAR $\phi[x_0/x]$ PARA CADA x_0.

Ex: $\forall x\, \phi \vdash \exists x\, \phi$

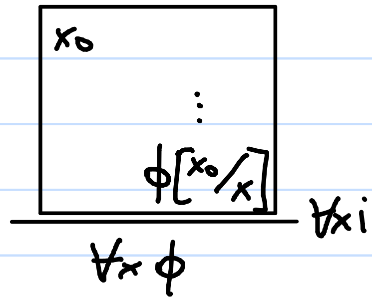
1.	$\forall x\, \phi$	PREMISSA
2.	$\phi[x/x]$	$\forall x E$ 1
3	$\exists x\, \phi$	$\exists x i$ 2

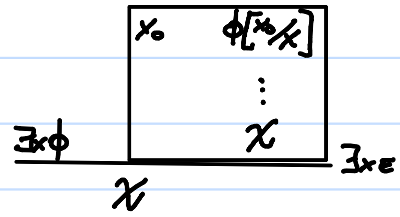
Ex: $\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x)),\ \exists x\,P(x) \vdash \exists x\,Q(x)$



1.		$\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$	Premissa
2.		$\exists x\,P(x)$	Premissa
3.	x_0	$P(x_0)$	Suposição
4.		$P(x_0) \rightarrow Q(x_0)$	$\forall x e$ 1
5.		$Q(x_0)$	$\rightarrow e$ 3,4
6.		$\exists x\,Q(x)$	$\exists x i$ 5
7.		$\exists x\,Q(x)$	$\exists x e$ 2, 3-6

→ ESSAS REGRAS PODEM ESTAR ANINHADAS, MAS TEMOS QUE USAR VARIÁVEIS DIFERENTES





EX: $\exists x P(x),\ \forall x(\forall y(P(x) \to Q(y))) \vdash \forall y Q(y)$

1		$\exists x P(x)$	PREMISSA
2		$\forall x(\forall y(P(x) \to Q(y)))$	PREMISSA
3	y_0		SUPOSIÇÃO
4	x_0	$P(x_0)$	SUPOSIÇÃO
5		$\forall y(P(x_0) \to Q(y))$	$\forall x e$ 2
6		$P(x_0) \to Q(y_0)$	$\forall y e$ 5
7		$Q(y_0)$	$\to E$ 4, 6
8		$Q(y_0)$	$\exists x e$ 1, 4-7
9.		$\forall y\, Q(y)$	$\forall y i$, 3-8