EQUIVALÊNCIA ENTRE QUANTIFICADORES

EX: "NEM TODO PÁSSARO PODE VOAR"

$$\neg \forall x \, (B(x) \to F(x)) \qquad \times \qquad \exists x \, (B(x) \wedge \neg F(x))$$

DEF: USAMOS $\phi_1 \dashv\vdash \phi_2$ QUANDO $\phi_1 \vdash \phi_2$ E $\phi_2 \vdash \phi_1$

ϕ_1 E ϕ_2 SÃO EQUIVALENTES

TEOREMA:

1. (a) $\neg \forall x \phi \dashv\vdash \exists x \neg \phi$ $\qquad \neg(p \wedge q \wedge r) \equiv \neg p \vee \neg q \vee \neg r$

   (b) $\neg \exists x \phi \dashv\vdash \forall x \neg \phi$ $\qquad \neg(p \vee q \vee r) \equiv \neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$

TEOREMA:

1. (a) $\neg \forall x \phi \dashv\vdash \exists x \neg \phi$

   (b) $\neg \exists x \phi \dashv\vdash \forall x \neg \phi$

$\neg(p \wedge q \wedge r) \equiv \neg p \vee \neg q \vee \neg r$

$\neg(p \vee q \vee r) \equiv \neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$

2. SE x NÃO É LIVRE EM ψ

   (a) $(\forall x \phi) \wedge \psi \dashv\vdash \forall x (\phi \wedge \psi)$

   (b) $(\forall x \phi) \vee \psi \dashv\vdash \forall x (\phi \vee \psi)$

   (c) $(\exists x \phi) \wedge \psi \dashv\vdash \exists x (\phi \wedge \psi)$

   (d) $(\exists x \phi) \vee \psi \dashv\vdash \exists x (\phi \vee \psi)$

   (e) $\forall x (\psi \to \phi) \dashv\vdash \psi \to \forall x \phi$

   (f) $\exists x (\phi \to \psi) \dashv\vdash (\forall x \phi) \to \psi$

   (g) $\forall x (\phi \to \psi) \dashv\vdash (\exists x \phi) \to \psi$

   (h) $\exists x (\psi \to \phi) \dashv\vdash \psi \to \exists x \phi$

$\phi \to \psi \equiv \neg \phi \vee \psi$

3. (a) $(\forall x \phi) \wedge (\forall x \psi) \dashv\vdash \forall x (\phi \wedge \psi)$

   (b) $(\exists x \phi) \vee (\exists x \psi) \dashv\vdash \exists x (\phi \vee \psi)$

4. (a) $\forall x \forall y \phi \dashv\vdash \forall y \forall x \phi$

   (b) $\exists x \exists y \phi \dashv\vdash \exists y \exists x \phi$

$\neg(P_1 \wedge P_2) \dashv\vdash \neg P_1 \vee \neg P_2$

1a $\neg \forall x\, \phi \dashv\vdash \exists x\, \neg \phi$

1	$\neg(P_1 \wedge P_2)$			PREMISSA
2.	$\neg(\neg P_1 \vee \neg P_2)$			SUPOSIÇÃO
3	$\neg P_1$	SUPOSIÇÃO	$\neg P_2$	SUPOSIÇÃO
4	$\neg P_1 \vee \neg P_2$	$\vee i_1$ 3	$\neg P_1 \vee \neg P_2$	$\vee i_2$ 3
5	$\perp$	$\neg E$ 2,4	$\perp$	$\neg E$ 2,4
6	P_1	PPC 3-5	P_2	PPC 3-5
7	$P_1 \wedge P_2$			$\wedge i$ 6,6
8	$\perp$			$\neg E$ 7,1
9.	$\neg P_1 \vee \neg P_2$			PPC. 2-8

P É UM PREDICADO UNÁRIO

$\neg \forall x\, P(x) \vdash \exists x\, \neg P(x)$

1.	$\neg \forall x\, P(x)$	PREMISSA
2	$\neg \exists x\, \neg P(x)$	SUPOSIÇÃO
3	x_0	
4	$\neg P(x_0)$	SUPOSIÇÃO
5	$\exists x\, \neg P(x)$	$\exists x i$ 5
6	$\perp$	$\neg E$ 5, 2
7	$P(x_0)$	PPC. 4-6
8	$\forall x\, P(x)$	$\forall x i$ 3-7
9	$\perp$	$\neg E$ 1, 8
10	$\exists x\, \neg P(x)$	PPC. 2-9

1	$\neg(P_1 \wedge P_2)$			PREMISSA
2.	$\neg(\neg P_1 \vee \neg P_2)$			SUPOSIÇÃO
3	$\neg P_1$	SUPOSIÇÃO	$\neg P_2$	SUPOSIÇÃO
4	$\neg P_1 \vee \neg P_2$	$\vee i_1$ 3	$\neg P_1 \vee \neg P_2$	$\vee i_2$ 3
5	$\perp$	$\neg E$ 2,4	$\perp$	$\neg E$ 2,4
6	P_1	PPC 3-5	P_2	PPC 3-5
7	$P_1 \wedge P_2$			$\wedge i$ 6,6
8	$\perp$			$\neg E$ 7,1
9.	$\neg P_1 \vee \neg P_2$			PPC. 2-8

ϕ É UMA FÓRMULA

$\neg \forall x\, \phi \vdash \exists x\, \neg \phi$ 1.a $\vdash$

1.	$\neg \forall x\, \phi$	PREMISSA
2	$\neg \exists x\, \neg \phi$	SUPOSIÇÃO
3	x_0	
4	$\neg \phi[x_0/x]$	SUPOSIÇÃO
5	$\exists x\, \neg \phi$	$\exists x$ i 5
6	$\perp$	$\neg$E 5, 2
7	$\phi[x_0/x]$	PPC. 4-6
8	$\forall x\, \phi$	$\forall x$ i 3-7
9	$\perp$	$\neg$E 1, 8
10	$\exists x\, \neg \phi$	PPC. 2-9

P É UM PREDICADO UNÁRIO

$\neg \forall x\, P(x) \vdash \exists x\, \neg P(x)$

1.	$\neg \forall x\, P(x)$	PREMISSA
2	$\neg \exists x\, \neg P(x)$	SUPOSIÇÃO
3	x_0	
4	$\neg P(x_0)$	SUPOSIÇÃO
5	$\exists x\, \neg P(x)$	$\exists x$ i 5
6	$\perp$	$\neg$E 5, 2
7	$P(x_0)$	PPC. 4-6
8	$\forall x\, P(x)$	$\forall x$ i 3-7
9	$\perp$	$\neg$E 1, 8
10	$\exists x\, \neg P(x)$	PPC. 2-9

EQUIVALÊNCIA 4a

$\exists x \neg \phi \vdash \neg \forall x \phi$] 1.a $\dashv$

1.	$\exists x \neg \phi$	PREMISSA
2	$\forall x \phi$	SUPOSIÇÃO
3	$x_0 \quad \neg \phi[x_0/x]$	SUPOSIÇÃO
4	$\phi[x_0/x]$	$\forall x E$ 2
5	$\perp$	$\neg E$ 4, 3
6	$\perp$	$\exists x E$ 1, 3-5
7	$\neg \forall x \phi$	$\neg i$ 2-6

2a. $(\forall x \phi) \wedge \psi \vdash \forall x (\phi \wedge \psi)$ (X NÃO É LIVRE EM ψ)

1	$(\forall x \phi) \wedge \psi$	PREMISSA
2	$\forall x \phi$	$\wedge E_1$ 1
3	ψ	$\wedge E_2$ 1
4	x_0	
5	$\phi[x_0/x]$	$\forall x$ 2
6	$\phi[x_0/x] \wedge \psi$	$\wedge i$ 5, 3
7	$(\phi \wedge \psi)[x_0/x]$	IDÊNTICO A 6 POIS X NÃO É LIVRE EM ψ
8	$\forall x (\phi \wedge \psi)$	$\forall x i$ 4-7

2a. $\forall x(\phi \wedge \psi) \vdash (\forall x\, \phi) \wedge \psi$

1	$\forall x(\phi \wedge \psi)$	PREMISSA
2	x_0	
3	$(\phi \wedge \psi)[x_0/x]$	$\forall x E$ 1
4	$\phi[x_0/x] \wedge \psi$	IDÊNTICO A 3
5	ψ	$\wedge E_2$ 4
6	$\phi[x_0/x]$	$\wedge E_1$ 4
7	$\forall x\, \phi$	$\forall x$ 2-6
8	ψ	$\forall x$ 2-6
9	$(\forall x\, \phi) \wedge \psi$	$\wedge i$ 7,8

3b $(\exists x\, \phi) \vee (\exists x\, \psi) \dashv\vdash \exists x (\phi \vee \psi)$

1	$(\exists x\, \phi) \vee (\exists x\, \psi)$		PREMISSO
2	$(\exists x\, \phi)$	$(\exists x\, \psi)$	SUPOSIÇÃO
3	$x_0 \quad \phi[x_0/x]$	$x_0 \quad \psi[x_0/x]$	SUPOSIÇÃO
4	$\phi[x_0/x] \vee \psi[x_0/x]$	$\phi[x_0/x] \vee \psi[x_0/x]$	$\vee$i 3
5	$(\phi \vee \psi)[x_0/x]$	$(\phi \vee \psi)[x_0/x]$	IDÊNTICO 5
6	$\exists x (\phi \vee \psi)$	$\exists x (\phi \vee \psi)$	$\exists x$i 5
7	$\exists x (\phi \vee \psi)$	$\exists x (\phi \vee \psi)$	$\exists x$E 2, 3-6
8	$\exists x (\phi \vee \psi)$		$\vee$E 1, 2-7