SEMÂNTICA DA LÓGICA PROPOSICIONAL

- VIMOS COMO ESTENDER DEDUÇÃO NATURAL PARA LÓGICA PROPOSICIONAL
- VAMOS ESTENDER A SEMÂNTICA
- ESPERAMOS ALGO COMO UMA TABELA VERDADE
- EM DEDUÇÃO NATURAL OBTEMOS UMA PROVA:
  - SEJA Γ O CONJUNTO DE PREMISSAS $\phi_1, \dots, \phi_n$
  - PARA MOSTRAR QUE $\Gamma \vdash \psi$ É VÁLIDO, DEVEMOS APRESENTAR UMA PROVA DE ψ A PARTIR DE Γ
- MAS COMO MOSTRAMOS QUE ψ NÃO É CONSEQUÊNCIA DE Γ?
  - TEMOS QUE MOSTRAR QUE TODA PROVA POSSÍVEL NÃO FUNCIONA.
- DEDUÇÃO NATURAL NOS DÁ UMA CARACTERIZAÇÃO POSITIVA DA LÓGICA
- SEMÂNTICA VAI NA OUTRA DIREÇÃO: PROVAR QUE ψ NÃO É CONSEQUÊNCIA DE Γ É A PARTE FÁCIL: ENCONTRAMOS UM MODELO NO QUAL TODO ϕ_i VALE T, MAS ψ VALE F.

→ MOSTRAR QUE $\Gamma \models \psi$ É FÁCIL SE O NÚMERO DE AVALIAÇÕES (LINHA DA TABELA VERDADE) É PEQUENO.

- ESSE NÃO É O CASO DA LÓGICA DE PREDICADOS
- HÁ UM NÚMERO INFINITO DE AVALIAÇÕES, AQUI CHAMAMOS MODELO
- SE QUEREMOS MOSTRAR $\Gamma \not\models \psi$, PRECISAMOS ENCONTRAR APENAS UM MODELO.

→ SE VOCÊ ESTIVER TENDO PROBLEMAS PARA PROVAR UM SEQUENTE $\Gamma \vdash \psi$, TALVEZ SEJA A HORA DE BUSCAR UM MODELO QUE MOSTRE QUE $\Gamma \not\models \psi$.

Modelos

→ Em lógica proposicional uma fórmula era avaliada em T ou F ao assumirmos valores para seus átomos proposicionais.

ma A construção de uma linha da tabela verdade.

→ Como enriquecer esta ideia?

→ Não podemos simplesmente assumir valores T ou F para todos os predicados

→ Precisamos explorar o sentido dos quantificadores

→ Por que $\forall x \exists y R(x,y)$ é diferente de $\exists y \forall x R(x,y)$

→ Quando encontramos $\exists y \psi$, devemos buscar um valor concreto para y t.q. ψ vale para aquele valor

→ Então $\exists y \psi$ é avaliado em T

→ Se não existe um tal valor, $\exists y \psi$ é avaliado em F.

- QUANDO ENCONTRAMOS $\forall y \psi$, DEVEMOS MOSTRAR QUE ψ VALE PARA TODO VALOR CONCRETO DE y.
  - ENTÃO $\forall y \psi$ É AVALIADO EM ψ
  - SE EXISTE VALOR DE y T.Q. ψ É AVALIADO EM F, ENTÃO AVALIAMOS $\forall y \psi$ EM F.

- PRECISAMOS DE UM UNIVERSO FIXO DE VALORES CONCRETOS.
- O VALOR VERDADE DE UMA FÓRMULA DEPENDE E VARIA COM A ESCOLHA DOS VALORES CONCRETOS, E DOS SIGNIFICADOS DOS SÍMBOLOS DE PREDICADO E FUNÇÃO.

Def: Sejam $\mathcal{F}$ um conjunto de símbolos de funções e $\mathcal{P}$ um conjunto de símbolos de predicado com aridades fixadas.

Um Modelo $\mathcal{M}$ do par $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ consiste do seguinte conjuntos de dados:

1. Um conjunto não vazio A, o universo de valores concretos
2. Para cada símbolo 0-ário $f \in \mathcal{F}$, um valor concreto $f^{\mathcal{M}} \in A$
3. Para cada símbolo n-ário $f \in \mathcal{F}$, $n > 0$, uma função concreta $f^{\mathcal{M}} : A^n \to A$ das n-tuplas sobre A para A
4. Para cada símbolo n-ário $P \in \mathcal{P}$, $n > 0$, um subconjunto $P^{\mathcal{M}} \subseteq A^n$ de n-tuplas sobre A.

→ Note que f e P são apenas símbolos, enquanto $f^{\mathcal{M}}$ e $P^{\mathcal{M}}$ são funções e relações concretas no modelo $\mathcal{M}$.

EX: $m \in \mathcal{F}$ É UMA FUNÇÃO UNÁRIA (1-ÁRIA)

$\underline{\underline{M_1}}$ $m^{M_1} : A \to A$ T.q. $m^{M_1}(x)$ É A MÃE DE X

$\underline{\underline{M_2}}$ $m^{M_2} : A \to A$ T.q. $m^{M_2}(x)$ É O PAI DE X

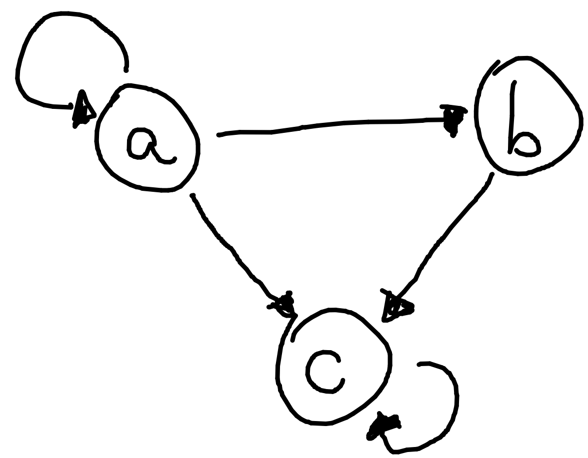
EX: $\mathcal{L} = \{i\}$ E $\mathcal{P} = \{R, F\}$, EM QUE i É 0-ÁRIA, F E R SÃO SÍMBOLOS DE PREDICADO 1-ÁRIO E 2-ÁRIO, RESPECTIVAMENTE.

UM MODELO É UM CONJUNTO CONCRETO. POR EXEMPLO, O CONJUNTO DE ESTADOS DE UM PROGRAMA DE COMPUTADOR.

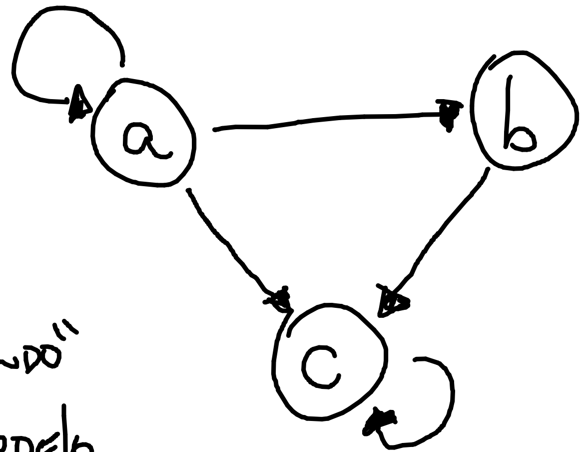
AS INTERPRETAÇÕES i^M, R^M, E F^M PODEM SER O ESTADO INICIAL, UMA RELAÇÃO DE TRANSIÇÃO, E UM CONJUNTO DE ESTADOS FINAIS.

$A = \{a, b, c\}$, $i^M = a$, $R^M = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,c), (c,c)\}$

E $F = \{b, c\}$



$A = \{a, b, c\}$, $i^M = a$, $R^M = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,c), (c,c)\}$
e $F = \{b, c\}$



PODEMOS CHECAR ALGUMAS FÓRMULAS

1. $\exists y R(i,y)$ DIZ QUE EXISTE TRANSIÇÃO "SAINDO" DO ESTADO INICIAL. ISSO VALE EM NOSSO MODELO.
2. $\neg F(i)$ DIZ QUE i NÃO É UM ESTADO FINAL
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x,y) \wedge R(x,z)) \rightarrow y = z)$ DIZ QUE A RELAÇÃO DE TRANSIÇÃO É DETERMINÍSTICA: A PARTIR DE UM ESTADO, HÁ APENAS UM OUTRO QUE PODEMOS ATINGIR
   → ISSO NÃO VALE EM NOSSO MODELO POIS $(a,b), (a,c) \in R^M$
4. $\forall x \exists y R(x,y)$ DIZ QUE NÃO HÁ DEADLOCKS: TODO ESTADO POSSUI UMA TRANSIÇÃO PARA "OUTRO" ESTADO.
   → ISSO VALE EM NOSSO MODELO.