INDECIBILIDADE DA LÓGICA DE PREDICADOS

- Em lógica proposicional podemos (teoricamente) decidir se vale $\models \phi$: se ϕ possui n átomos proposicionais sua tabela verdade possui 2^n linhas. A coluna de ϕ possui apenas T sse $\models \phi$ vale.

- Em lógica de predicados isso não é possível

- O problema de determinar se uma fórmula de lógica de predicados vale é conhecido como um problema de decisão

→ O problema de determinar se uma fórmula de lógica de predicados vale é conhecido como um problema de decisão

- Uma solução para um problema de decisão é um algoritmo (escrito em C, Java, Python, ou qualquer linguagem comum) que recebe instâncias do problema na entrada (→ input) e sempre termina, produzindo um "sim" ou "não" corretamente como saída. (↳ output)

- No caso do problema de decisão para lógica de predicados o input é uma fórmula ϕ arbitrária de lógica de predicados e o programa está correto se produz "sim" sempre que ϕ é válida e "não" caso contrário.

- O programa deve terminar para toda fórmula.

- Não é permitido um programa que fique "pensando" para sempre

Formalmente

Validade em Lógica de Predicados: Dada uma fórmula ϕ de lógica de predicados, vale ou não $\models \phi$?

→ Vamos mostrar que este problema não é solúvel: não é possível escrever um algoritmo que funcione para todos ϕ.

→ Naturalmente, há instâncias fáceis de resolver.

→ A princípio, todo ϕ pode ser checada: existe um certificado que garante que a resposta é "sim" ou "não", mas não é possível criar um método mecânico para determinar.

→ Vamos provar isso por uma técnica conhecida como

Redução de Problemas

- Pegamos outro problema que sabemos ser insolúvel
- E mostramos que a solubilidade do nosso problema implica na solubilidade do outro.

O Problema de Pos-Correspondência: Dada uma sequência finita de pares $(s_1,t_1),(s_2,t_2),\dots,(s_k,t_k)$ t.q. s_i e t_i são sequências binárias, existe uma sequência de índices $i_1,\dots,i_m$ com $m \geq 1$ t.q.

$$s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_m} \overset{?}{=} t_{i_1} t_{i_2} \cdots t_{i_m}.$$

Ex: $C = \Big((\underset{s_1}{1}, \underset{t_1}{101}), (\underset{s_2}{10}, \underset{t_2}{00}), (\underset{s_3}{011}, \underset{t_3}{11}) \Big)$

$(2,3)$

$$s_2 s_3 = 10\,011$$
$$t_2 t_3 = 00\,11$$

$(1,3,2,3)$ solução

$$s_1 s_3 s_2 s_3 = 1\,011\,10\,011 =$$
$$t_1 t_3 t_2 t_3 = 101\,11\,00\,11$$

Ex: $C = \big((011, 0), (01, 011), (01, 101), (10, 001) \big)$

TEOREMA: O PROBLEMA DE DECISÃO DE VALIDADE DE LÓGICA DE PREDICADOS É INDECIDÍVEL: NÃO EXISTE PROGRAMA QUE, DADO ϕ, DECIDE SE $\models \phi$.

PROVA: DADO UMA INSTÂNCIA DO PROBLEMA DE PÓS-CORRESPONDÊNCIA

$$C = \begin{matrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_k \\ t_1 & t_2 & & t_k \end{matrix}$$

VAMOS CONSTRUIR UMA FÓRMULA ϕ DE LÓGICA DE PREDICADOS T.Q. $\models \phi$ SSE C TEM UMA SOLUÇÃO ("SIM" $\Leftrightarrow$ "SIM")

FUNÇÕES: CONSTANTE e, E FUNÇÕES UNÁRIAS f_0 E f_1

- e É A PALAVRA VAZIA
- f_0 E f_1 SÃO AS FUNÇÕES DE CONCATENAÇÃO DE 0 E 1, RESP.

$$f_0(s) = s0 \quad \text{E} \quad f_1(s) = s1$$

- SE $b_1 b_2 \cdots b_l$ É UMA SEQ. BINÁRIA, ESCREVEMOS

$$f_{b_1 b_2 \cdots b_l}(e) \text{ PARA DENOTAR } f_{b_l}(f_{b_{l-1}}(\cdots f_{b_2}(f_{b_1}(e))))$$

PREDICADO BINÁRIO P

$P(s,t)$ É "EXISTE SEQ. DE ÍNDICES $(i_1, \dots, i_m)$ T.Q. s É O TERMO $s_{i_1} \cdots s_{i_m}$ E t É O TERMO $t_{i_1} \cdots t_{i_m}$"

ϕ É DA FORMA $\phi_1 \wedge \phi_2 \to \phi_3$

$$P(f_{s_1}(e), f_{t_1}(e)) \wedge P(f_{s_2}(e), f_{t_2}(e)) \wedge \dots \wedge P(f_{s_k}(e), f_{t_k}(e))$$

$$\phi_1 = \bigwedge_{i=1}^{k} P\left(f_{s_i}(e), f_{t_i}(e)\right)$$

$$\phi_2 = \forall v \forall w \left(P(v,w) \to \bigwedge_{i=1}^{k} P\left(f_{s_i}(v), f_{t_i}(w)\right)\right)$$

$$\phi_3 = \exists z P(z,z)$$

$$C = \begin{matrix} s_1 & s_2 & \dots & s_k \\ t_1 & t_2 & \dots & t_k \end{matrix}$$

$\to$ AFIRMAMOS QUE $\models \phi$ SSE C TEM SOLUÇÃO

SUPONHA QUE $\models \phi$ VALE. VAMOS ENCONTRAR UM MODELO QUE NOS DIZ QUE C TEM SOLUÇÃO.

- A É O CONJUNTO DE TODAS STRING BINÁRIOS FINITAS
- A INTERPRETAÇÃO e^{M} DE e É ϵ (PALAVRA VAZIA)
- A INTERPRETAÇÃO DE f_0 É A FUNÇÃO UNÁRIA f_0^{M} T.Q. $f_0^{M}(s) = s0$
- A INTERPRETAÇÃO DE f_1 É A FUNÇÃO UNÁRIA f_1^{M} T.Q. $f_1^{M}(s) = s1$
- A INTERPRETAÇÃO DE P É

$$P^{M} = \left\{ (s,t) : \text{EXISTE SEQ. DE ÍNDICES } (i_1, \dots, i_m) \text{ T.Q. } s \text{ É } s_{i_1} \cdots s_{i_m} \text{ E } t \text{ É } t_{i_1} \cdots t_{i_m} \right\}$$

$\rightarrow$ COMO $\models \phi$ VALE, TEMOS $M \models \phi$

$$\phi_1 \wedge \phi_2 \rightarrow \phi_3$$

$$\phi_1 = \bigwedge_{i=1}^{k} P\left(f_{s_i}(e), f_{t_i}(e)\right)$$

$$\phi_2 = \forall v \forall w \left(P(v,w) \rightarrow \bigwedge_{i=1}^{k} P\left(f_{s_i}(v), f_{t_i}(w)\right)\right)$$

$$\phi_3 = \exists z P(z,z)$$

→ COMO $\models \phi$ VALE, TEMOS $M \models \phi$

NOTE PELA DEFINIÇÃO DE P^M, TEMOS $(s_i, t_i) \in P^M$ PARA TODO i

COMO $s_i = f_{s_i}^M(\epsilon) = f_{s_i}^M(e^M)$,
$t_i = f_{t_i}^M(\epsilon) = f_{t_i}^M(e^M)$ TEMOS $M \models P(f_{s_i}(e), f_{t_i}(e))$ PARA TODO i

$$M \models \bigwedge_{i=1}^{k} P(f_{s_i}(e), f_{t_i}(e)) = \phi_1$$

AFIRMAMOS QUE $M \models \phi_2$. DIZ QUE SEMPRE QUE $(s,t) \in P^M$, TEMOS $(ss_i, tt_i) \in P^M$ PARA TODO i

→ ISSO É CLARO: SE $(s,t) \in P^M$ EXISTE $i_1, \dots, i_m$ T.Q. s É $s_{i_1} \cdots s_{i_m}$ E t É $t_{i_1} \cdots t_{i_m}$, MAS $i_1, \dots, i_m, i$ É T.Q. ss_i É $s_{i_1} \cdots s_{i_m} s_i$ E tt_i É $t_{i_1} \cdots t_{i_m} t_i$ PARA TODO i.

$P^M = \{ (s,t) :$ EXISTE SEQ. DE ÍNDICES $(i_1, \dots, i_m)$ T.Q. s É $s_{i_1} \cdots s_{i_m}$ E t É $t_{i_1} \cdots t_{i_m} \}$

$$\phi_1 \wedge \phi_2 \to \phi_3$$

$$\phi_1 = \bigwedge_{i=1}^{k} P(f_{s_i}(e), f_{t_i}(e))$$

$$\phi_2 = \forall v \forall w \left(P(v,w) \to \bigwedge_{i=1}^{k} P(f_{s_i}(v), f_{t_i}(w)) \right)$$

$$\phi_3 = \exists z P(z,z)$$

COMO $M \models \phi_1$ E $M \models \phi_2$, TEMOS $M \models \phi_1 \wedge \phi_2$

E COMO $M \models \underbrace{\phi_1 \wedge \phi_2 \rightarrow \phi_3}_{\phi}$, ENTÃO $M \models \phi_3$

OU SEJA $M \models \exists z\, P(z,z)$

$$P^M = \{ (s,t) : \text{EXISTE SEQ. DE ÍNDICES } (i_1, \dots, i_m) \text{ T.Q. } s \text{ É } s_{i_1} \dots s_{i_m} \text{ E } t \text{ É } t_{i_1} \dots t_{i_m} \}$$

PELA DEFINIÇÃO DE P^M, HÁ SOLUÇÃO PARA C.