LOGICA

$$\frac{Q1 + Q2 + A1 + Q3 + Q4 + A2 + \text{MÉDIA LISTAS}}{7}$$

LÓGICA PROPOSICIONAL

BERTRAND RUSSELL

→ DESENVOLVER UMA LINGUAGEM PARA MODELAR SITUAÇÕES

→ TRATAR FORMALMENTE

→ LÓGICA SIMBÓLICA

- PREMISSAS
- CONCLUSÕES

SENTENÇA ATÔMICA

EX: SE $\overbrace{\text{O TREM ATRASAR}}^{p}$ E NÃO $\overbrace{\text{HOUVER TAXI NA ESTAÇÃO}}^{q}$, ENTÃO $\underbrace{\text{JOÃO VAI SE ATRASAR PARA REUNIÃO}}_{r}$ $\Big\}$ $p \wedge \neg q \rightarrow r$

se $\overbrace{\text{estiver chovendo}}^{p}$ e joana não $\overbrace{\text{tiver um guarda chuva}}^{q}$, ent~ao $\underbrace{\text{joana vai se molhar}}_{r}$ $\Big\}$ $p \wedge \neg q \rightarrow r$

→ MESMA ESTRUTURA

SE p E NÃO q, ENTÃO r.

$ax + b = c$

$\Rightarrow x = \frac{c-b}{a}$

$3x + 7 = 2500$

$x = \frac{2500 - 7}{3}$

EX

(1) SE $\overbrace{\text{O TREM ATRASAR}}^{p}$ E NÃO $\overbrace{\text{HOUVER TAXI NA ESTAÇÃO}}^{q}$,
ENTÃO $\underbrace{\text{JOÃO VAI SE ATRASAR PARA REUNIÃO}}_{r}$

(2) JOÃO NÃO $\overbrace{\text{SE ATRASOU PARA A REUNIÃO}}^{r}$

(3) O TREM ATRASOU

(4) HAVIA TAXI NA ESTAÇÃO

PREMISSAS

$p \wedge \neg q \to r$

$\neg r$

p

CONCLUSÃO

q

(1) se $\overbrace{\text{estiver chovendo}}^{p}$ e joana não $\overbrace{\text{tiver um guarda chuva}}^{q}$,
ent~ao $\underbrace{\text{joana vai se molhar}}_{r}$

$p \wedge \neg q \to r$

(2) JOANA NÃO SE MOLHOU

$\neg r$

(3) ESTÁ CHOVENDO

p

(4) JOANA TEM GUARDA CHUVA

q

SENTENÇAS DECLARATIVAS

→ EXPOR A ESTRUTURA LÓGICA DE UM ARGUMENTO

→ NOS BASEAMOS EM PROPOSIÇÕES OU SENTENÇAS DECLARATIVAS QUE EM PRINCÍPIO PODEMOS DECIDIR SE SÃO VERDADEIRAS OU FALSAS

EX: A SOMA DE 3 E 5 É 8

A SOMA DE 3 E 5 É 7

TODO NATURAL PAR É A SOMA DE DOIS PRIMOS (CONJ. GOLDBERG)

TODOS OS MARCIANOS GOSTAM DE PIZZA DE CALABRESA (VACUIDADE)

EX: NÃO DECLARATIVAS

VOCÊ PODE ME PASSAR O SAL?

PRONTO, VÁ.

QUE A FORÇA ESTEJA COM VOCÊ.

→ Desenvolver um cálculo sobre a razão que nos permita tirar conclusões a partir de suposições dadas.

Premissas

→ Desenvolver uma lógica simbólica

- Traduzimos um conjunto (grande) de sentenças declarativas em símbolos
- Mecânica de suas relações
- Automatizar sua manipulação

→ Consideramos algumas sentenças declarativas como atômicas ou indecomponíveis

O número 5 é par

→ Atribuímos símbolos p, q, r ou $p_1, p_2, \dots$ a cada sentença atômica

→ PODEREMOS CODIFICAR SENTENÇAS MAIS COMPLEXAS POR MEIO COMPOSIÇÃO

p: GANHEI NA LOTERIA NA SEMANA PASSADA

q: COMPREI UM BILHETE DE LOTERIA

r: GANHEI O SORTEIO DA SEMANA PASSADA

REGRAS DE COMPOSIÇÃO

$\neg$: A NEGAÇÃO P, DENOTADA POR $\neg p$, EXPRESSA
\NEG

NÃO GANHEI NA LOTERIA NA SEMANA PASSADA

$\vee$: A DISJUNÇÃO DE P E R, DENOTAR POR $p \vee r$, EXPRESSO QUE PELO MENOS UM DOS DOIS É VERDADE

GANHEI NA LOTERIA NA SEMANA PASSADA OU GANHEI O SORTEIO DA SEMANA PASSADA

REGRAS DE COMPOSIÇÃO

$\neg$	$\vee$	$\wedge$	$\rightarrow$
NEGAÇÃO	DISJUNÇÃO	CONJUNÇÃO	IMPLICAÇÃO

VAMOS USAR AS REGRAS REPETIDAMENTE PARA OBTER EXPRESSÕES COMPOSTAS.

REGRAS DEDUÇÃO NATURAL

- CONJUNÇÃO

INTRODUÇÃO ($\wedge i$): PODEMOS AFIRMAR $\phi \wedge \psi$ SE JÁ CONCLUÍMOS ϕ E ψ SEPARADAMENTE E ANTERIORMENTE

$$\frac{\phi \qquad \psi}{\phi \wedge \psi} \wedge i$$

Regras Dedução Natural

- **Conjunção**

– **Introdução** ($\wedge i$): podemos afirmar $\phi \wedge \psi$ se já concluímos ϕ e ψ separadamente e anteriormente

$$\begin{array}{lll} 17 & \phi & \\ & \vdots & \\ 25 & \psi & \\ & & \\ 67 & \phi \wedge \psi & \wedge i \quad 17, 25 \end{array}$$

$$\frac{\phi \qquad \psi}{\phi \wedge \psi} \wedge i$$

– **Eliminação** ($\wedge e_i$): podemos afirmar ϕ e ψ separadamente se já concluímos $\phi \wedge \psi$ anteriormente

$\wedge e_1$ $\quad$ $\wedge e_2$

$$\begin{array}{lll} 22 & \phi \wedge \psi & \\ & \vdots & \\ 73 & \phi & \wedge e_1 \end{array}$$

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi} \wedge e_1 \qquad \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi} \wedge e_2$$

NEGAÇÃO DUPLA

$$\frac{\neg\neg\phi}{\phi}\ \neg\neg e$$

ELIMINAÇÃO

$$\frac{\phi}{\neg\neg\phi}\ \neg\neg i$$

INCLUSÃO

133	$\neg\neg\phi$	
	$\vdots$	
259	ϕ	$\neg\neg e$ 133

133	ϕ	
	$\vdots$	
259	$\neg\neg\phi$	$\neg\neg i$ 133

Implição

Eliminação ($\to e$)

Ex: SE CHOVER, ENTÃO FICA MOLHADO

CHOVEU

Logo FICOU MOLHADO

$$\frac{\phi \qquad \phi \to \psi}{\psi} \to e \qquad \text{(MODUS PONENS)}$$

1532	ϕ	
	$\vdots$	
1723	$\phi \to \psi$	
	$\vdots$	
30527	ψ	$\to e$ 1532, 1723

1532	$\phi \to \psi$	
	$\vdots$	
1723	ϕ	
	$\vdots$	
30527	ψ	$\to e$ 1723, 1532

Implicação

Eliminação

Ex: SE CHOVER, ENTÃO FICA MOLHADO
ESTÁ SECO
Concl: NÃO CHOVEU

$$\frac{\phi \rightarrow \psi \qquad \neg\psi}{\neg\phi} \text{ M.T.}$$

(MODUS TOLLENS)

1532 $\neg\psi$

$\vdots$

1723 $\phi \rightarrow \psi$

$\vdots$

30527 $\neg\phi$ M.T. 1723, 1532

1532 $\phi \rightarrow \psi$

$\vdots$

1723 $\neg\psi$

$\vdots$

30527 $\neg\phi$ $\rightarrow e$ 1532, 1723

$$\frac{\phi \to \psi \qquad \neg\psi}{\neg\phi}\ \text{M.T.}$$

SEQUENTE

PREMISSA

SUPOSIÇÃO

$$p \to q,\ \neg q \vdash \neg p$$

UMA OUTRA FORMA DE VER ISSO: $p \to q \vdash \neg q \to \neg p$

EX:

1	$p \to q$	PREMISSA
2	$\neg q$	SUPOSIÇÃO
3	$\neg p$	M.T. 1, 2
4	$\neg q \to \neg p$	$\to$i, 2-3

NOVO ELEMENTO!

	$\vdots$	
j	ϕ	SUPOSIÇÃO
	$\vdots$	REGRAS
k	ψ	
	$\phi \to \psi$	$\to$i j-k

→ ABRIMOS UMA CAIXA COM UMA PREMISSA TEMPORÁRIA

EX: SE VOCÊ É FRANCÊS, ENTÃO É EUROPEU

Ex. Se você é francês, então é europeu

1	Você é francês	suposição
	⋮	
273	Você é europeu	regras do mundo

Se você é francês, então é europeu $\to i$ 1-273

Você é francês $\to$ você é europeu

$$\begin{array}{|c|} \hline \phi \\ \vdots \\ \psi \\ \hline \end{array}$$

$$\overline{\phi \to \psi} \quad \to i$$

- Para provar $\phi \to \psi$, primeiro devemos assumir temporariamente que vale ϕ

- Para provar $\phi \to \psi$, primeiro devemos assumir temporariamente que vale ϕ

- Dentro da caixa, podemos usar ϕ e outras fórmulas obtidas anteriormente (como, por exemplo, premissas)

- Não podemos usar fórmulas dependentes/derivadas de suposições temporárias que não sejam mais "vigentes"

- Podemos abrir caixas dentro de caixas

<u>Ex</u>: Prove que $\neg q \to \neg p \vdash p \to \neg\neg q$

1	$\neg q \to \neg p$	Premissa
2	p	Suposição
3	$\neg\neg p$	$\neg\neg i$ 2
4	$\neg\neg q$	M.T 1, 3
5	$p \to \neg\neg q$	$\to i$ 2-4

Escopo da suposição

$\vdash p \to p$

1	p	Suposição
2	$p \to p$	$\to p$ 1-1

EX: $q \to r \vdash \underbrace{(\neg q \to \neg p)}_{2} \to (p \to r)$

1	$q \to r$	PREMISSA
2	$\neg q \to \neg p$	SUPOSIÇÃO
3	p	SUPOSIÇÃO
4	$\neg\neg p$	$\neg\neg i$ 3
5	$\neg\neg q$	M.T. 2, 4
6	q	$\neg\neg e$ 5
7	r	$\to e$ 6, 1
8	$p \to r$	$\to i$ 3-7
9	$(\neg q \to \neg p) \to (p \to r)$	$\to i$ 2-8

EX. EM PORTUGUÊS

p = TEM PROBLEMA

q = A RUA ESTÁ MOLHADA

r = O CARRO DERRAPA

EX: $q \to r \vdash (\neg q \to \neg p) \to (p \to r)$

$\vdash (q \to r) \to ((\neg q \to \neg p) \to (p \to r))$

1	$q \to r$	SUPOSIÇÃO
2	$\neg q \to \neg p$	SUPOSIÇÃO
3	p	SUPOSIÇÃO
4	$\neg\neg p$	$\neg\neg i$ 3
5	$\neg\neg q$	M.T. 2, 4
6	q	$\neg\neg e$ 5
7	r	$\to e$ 6, 1
8	$p \to r$	$\to i$ 3-7
9	$(\neg q \to \neg p) \to (p \to r)$	$\to i$ 2-8
10	$(q \to r) \to (\neg q \to \neg p) \to (p \to r)$	$\to i$ 1-9

DEF: FÓRMULAS LÓGICOS ϕ PARA AS QUAIS O SEQUENTE

$\vdash \phi$

SÃO CHAMADAS DE TEOREMAS

- EM PARTICULAR, PODEMOS TRANSFORMAR QUALQUER PROVA DE

$$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \psi$$

EM UMA PROVA DE $\vdash (\phi_1 \to (\phi_2 \to (\cdots (\phi_n \to \psi) \cdots)))$

ϕ_1	PREMISSA
ϕ_2	PREMISSA
$\vdots$	
ϕ_n	PREMISSA
$\vdots$	?
ψ	

ϕ_1	SUPOSIÇÃO
ϕ_2	SUPOSIÇÃO
$\vdots$	
ϕ_n	SUPOSIÇÃO
$\vdots$	?
ψ	
$\phi_n \to \psi$	
$\vdots$	
$\phi_2 \to (\phi_3 \to \cdots (\phi_n \to \psi) \cdots)$	
$\phi_1 \to (\phi_2 \to (\phi_3 \to \cdots (\phi_n \to \psi) \cdots)$	

EX: $p \to q \vdash (p \wedge r) \to (q \wedge r)$

1	$p \to q$	PREMISSA
2	$p \wedge r$	SUPOSIÇÃO
3	p	$\wedge e_1$ 2
4	q	$\to e$ 3, 1
5	r	$\wedge e_2$ 2
6	$q \wedge r$	$\wedge i$ 4, 5
7	$(p \wedge r) \to (q \wedge r)$	$\to i$ 2-6

Disjunção ($\vee$)

$\vee$ - Introdução

- Se temos ϕ, então $\phi \vee \psi$ é válido mesmo que não tenhamos ψ.

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi}\,\vee i_1 \qquad\qquad \frac{\phi}{\psi \vee \phi}\,\vee i_2$$

$\vee$ - Eliminação

$$\vee i_1(\phi) = \phi \vee \psi$$

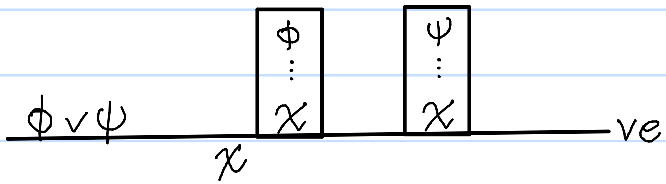
$$\vee i_2(\phi) = \psi \vee \phi$$

- Temos $\phi \vee \psi$
- Precisamos encontrar uma consequência em comum de ϕ e ψ

$$\frac{\phi \vee \psi \qquad \boxed{\begin{array}{c}\phi \\ \vdots \\ \chi\end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c}\psi \\ \vdots \\ \chi\end{array}}}{\chi}\,\vee e$$

$\vee$ - ELIMINAÇÃO

- TEMOS $\phi \vee \psi$
- PRECISAMOS ENCONTRAR UMA CONSEQUÊNCIA EM COMUM DE ϕ E ψ



	$\vdots$	PREMISSAS
ℓ	$\phi \vee \psi$	
J_1	ϕ	SUPOSIÇÃO
	$\vdots$	
K_1	χ	
J_2	ψ	SUPOSIÇÃO
	$\vdots$	
K_2	χ	
	χ	$\vee e$ ℓ, $J_1 - K_1$, $J_2 - K_2$

	$\vdots$	PREMISSAS
	$\phi \vee \psi$	
J_1	ϕ	SUPOSIÇÃO
	$\vdots$	
K_1	χ	
	ψ	SUPOSIÇÃO
	$\vdots$	
	χ	
	χ	$\vee e$ $J_1 - K_1$

EX: $p \vee q \vdash q \vee p$ (COMUTATIVIDADE)

$p \rightarrow q$ X $q \rightarrow p$

NÃO É COMUTATIVO

1	$p \vee q$	PREMISSA
2	p	SUPOSIÇÃO
3	$q \vee p$	vi_2 2
4	q	SUPOSIÇÃO
5	$q \vee p$	vi_1 4
6	$q \vee p$	ve 1, 2-3, 4-5

1	$p \vee q$	PREMISSA
2	p	SUPOSIÇÃO
3	$q \vee p$	vi_2 2
	q	SUPOSIÇÃO
	$q \vee p$	vi_1 2
4	$q \vee p$	ve 1, 2-3, 2-3

EX: $(p \vee q) \vee r \vdash p \vee (q \vee r)$

MAIS EXPOSTO

1	$(p \vee q) \vee r$	PREMISSA
2	$p \vee q$	SUPOSIÇÃO
3	p	SUPOSIÇÃO
4	$p \vee \underbrace{(q \vee r)}_{\psi}$	$\vee i_1$ 3
5	q	SUPOSIÇÃO
6	$q \vee r$	$\vee i_1$ 5
7	$p \vee (q \vee r)$	$\vee i_2$ 6
8	$p \vee (q \vee r)$	$\vee e$ 2, 3-4, 5-7
9	r	SUPOSIÇÃO
10	$q \vee r$	$\vee i_2$ 9
11	$p \vee (q \vee r)$	$\vee i_2$ 10
12	$p \vee (q \vee r)$	$\vee e$ 1, 2-8, 9-11

$\shortparallel$

χ

$\phi \vee \psi \quad \boxed{\phi \; \vdots \; \chi} \quad \boxed{\psi \; \vdots \; \chi} \quad \chi \quad \vee e$

$x + y + z$

$(x+y)+z = x+(y+z)$

ASSOCIATIVIDADE

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi}\ \vee i_1 \qquad \frac{\phi}{\psi \vee \phi}\ \vee i_2$$

$\vdots$

J $\phi \vee (\psi \vee \chi)$

$\vdots$

$(\phi \vee \psi) \vee \chi$ ASSOCIATIVIDADE J

$$\frac{\phi \vee (\psi \vee \chi)}{(\phi \vee \psi) \vee \chi}\ \text{ASSOCIATIVIDADE}$$

EX: $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

MAIS EXPOSTO

1	$p \wedge (q \vee r)$	PREMISSA
2	p	$\wedge e_1$ 1
3	$q \vee r$	$\wedge e_2$ 1
4	q	SUPOSIÇÃO
5	$p \wedge q$	$\wedge i$ 2, 4
6	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee i_1$ 5
7	r	SUPOSIÇÃO
8	$p \wedge r$	$\wedge i$ 2, 7
9	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee i_2$ 8
	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee e$ 3, 4-6, 7-9

QUALQUER COISA

$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$

DISTRIBUTIVIDADE

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi} \wedge e_1$$

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\psi} \wedge e_2$$

$\vdots$

J $\phi \wedge (\psi \vee \chi)$

$\vdots$

$(\phi \wedge \psi) \vee (\phi \vee \chi)$ DISTRIBUTIVIDADE

$$\frac{\phi \wedge (\psi \vee \chi)}{(\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi)} \text{ DISTRIBUTIVIDADE}$$

EX $\vdash p \to (q \to p)$

1	p	SUPOSIÇÃO
2	q	SUPOSIÇÃO
3	p	CÓPIA 1
4	$q \to p$	$\to i$ 2-3
5	$p \to (q \to p)$	$\to i$ 1-4

REGRAS DA NEGAÇÃO

DEF: UMA **CONTRADIÇÃO** É EXPRESSÃO DA FORMA $\neg\phi \wedge \phi$ OU $\phi \wedge \neg\phi$

$\bot$ $\qquad\qquad \dfrac{\bot}{\phi}\ \bot e \qquad\qquad \dfrac{\phi \qquad \neg\phi}{\bot}\ \neg e$

EX: $\neg p \vee q \vdash p \rightarrow q$

1	$\neg p \vee q$	PREMISSA
2	$\neg p$	SUPOSIÇÃO
3	p	SUPOSIÇÃO
4	$\bot$	$\neg e$ 2,3
5	q	$\bot e$ 4
6	$p \rightarrow q$	$\rightarrow i$ 3-5
7	q	SUPOSIÇÃO
8	p	SUPOSIÇÃO
9	q	CÓPIA 9
	$p \rightarrow q$	
	$p \rightarrow q$	$\vee e$ 1

1	ESTÁ CHOVENDO	PREMISSA
2	NÃO CHOVENDO	PREMISSA
3	ESTÁ CHOVENDO $\vee$ A LUA É DE QUEIJO	$\vee i_1$ 1
4	A LUA É DE QUEIJO	

$$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots\\ \vdots\\ \bot\end{array}}}{\neg\phi}\ \neg i$$

SE FIZERMOS UMA SUPOSIÇÃO E CHEGARMOS A UMA CONTRADIÇÃO, ENTÃO A SUPOSIÇÃO NÃO PODE SER VERDADE.

$$\begin{array}{ll}\boxed{\begin{array}{c}\neg\phi\\ \\ \\ \bot\end{array}} & \\ \neg\neg\phi & \neg i\\ \phi & \neg\neg e\end{array}$$

$$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\neg\phi\\ \\ \bot\end{array}}}{\phi}\ \text{PROVA POR CONTRADIÇÃO}$$

Ex: $p \to q,\ p \to \neg q \vdash \neg p$

$$\frac{p \qquad p \to q}{q} \to e$$

1	$p \to q$	PREMISSA
2	$p \to \neg q$	PREMISSA
3	p	SUPOSIÇÃO
4	q	$\to e$ 3, 1
5	$\neg q$	$\to e$ 3, 2
6	$\perp$	$\neg e$ 4, 5
7	$\neg p$	$\neg i$ 3–6

Ex: $p \to q,\ p \to \neg q \vdash p$ NÃO É VÁLIDO

$\vdots$

$i \quad \phi$ SUPOSIÇÃO

$\vdots \quad \vdots$ REGRAS

$j \quad \psi$

$\phi \to \psi \qquad \to i \quad i\text{–}j$

$i \quad \phi \vee \psi$

$j_1 \quad \phi \qquad\qquad j_2 \quad \psi$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$k_1 \quad \chi \qquad\qquad k_2 \quad \chi$

$\phi \to \chi \qquad\qquad \psi \to \chi$

$\chi \qquad \vee e \quad i, \ j_1 - k_1, \ j_2 - k_2$